

Хмельницький національний університет

**НАУКОВІ ТА ІНЖЕНЕРНІ МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ  
ОБЛАДНАННЯ ГАЛУЗІ:  
МВ ДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ**

*для здобувачів вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії  
зі спеціальності 133 «Галузеве машинобудування»*

*Затверджено на засіданні  
кафедри машин і апаратів,  
електромеханічних та енергетичних систем.  
Протокол № 10 від 22.03.2020*

Хмельницький 2020

Наукові та інженерні методи проектування обладнання галузі: МВ до вивчення дисципліни: для здобувачів вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» / М. Є. Скиба, О. М. Синюк, Ю. Б. Михайловський, П. С. Майдан, Е. О. Золотенко. – Хмельницький : ХНУ, 2020. – 116 с.

Укладачі: Скиба М. Є., докт. техн. наук, професор.;  
Синюк О. М., докт. техн. наук, професор.;  
Михайловський Ю. Б., канд. техн. наук, доц.;  
Майдан П. С., канд. техн. наук, доц.;  
Золотенко Е. О., асистент.

Відповідальний за випуск: Поліщук О. С., докт. техн. наук, доц.

Редактор-коректор: Яремчук В. С.

Технічне редагування, коректування і верстка: Чопенко О. В.

Макетування та друк здійснено редакційно-видавничим центром Хмельницького національного університету (м. Хмельницький, вул. Інститутська, 7/1). Підп. до друку \_\_\_\_\_. Зам. № \_\_\_\_\_, електронне видання, 2020.

ХНУ, 2020

## ВСТУП

---

Дисципліна «Наукові та інженерні методи проектування обладнання галузі» є однією із фахових дисциплін і займає провідне місце у підготовці здобувачів вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії спеціальності 133 «Галузеве машинобудування».

**Мета дисципліни.** Навчити здобувачів вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії користуватися сучасним програмним забезпеченням, з використанням сучасних систем автоматизованого проектування при проведенні інженерних та наукових досліджень.

**Предмет дисципліни.** Програмне забезпечення, з використанням сучасних систем автоматизованого проектування при проведенні інженерних та наукових досліджень.

**Завдання дисципліни.** Формування практичних навичок з різними методиками розрахунку і пошуками оптимальних параметрів конструктивних та технологічних факторів при проведенні інженерних та наукових дослідженнях; використання програмного забезпечення для пошуку оптимума по декільком основним методам; у т.ч. використанням отриманих знання на практиці при проведенні інженерних та наукових досліджень.

Відповідно до Стандарту вищої освіти із зазначеної спеціальності та освітньої програми дисципліна має забезпечити:

- **компетентності:** здатність аналізувати, порівнювати наслідки власної наукової діяльності; генерувати нові ідеї; здійснювати літературний пошук, бібліографічний огляд та аналіз наукових джерел; обґрунтовувати науковий апарат дослідження, формулювати гіпотези та проводити експериментальні дослідження; отримувати нові знання шляхом застосування методів наукового пізнання, оцінюванні результатів дослідницької діяльності; застосовувати комплекс знань про закони, закономірності, принципи, інноваційні концепції і підходи у галузевому машинобудуванні для теоретичного обґрунтування і захисту власної наукової позиції та результатів дослідження; здатність застосовувати сучасні методи математичного моделювання із використанням новітніх інформаційних технологій, комп'ютерних систем та прикладних програмних продуктів для отримання нових науково важливих та практично цінних результатів; здатність і готовність проектувати та розраховувати конкурентоздатне устаткування та оснащення галузі.

- **програмні результати навчання:** Розробити математичні моделі в інженерних задачах та методики підготовки і рішення задачі на ПК. Провести оптимізацію об'єктів дослідження. Розробити алгоритми і способи їх описання та методику планування експерименту. Провести постановку планування експерименту та визначення рівняння регресії на ПК. Виконувати пошук глобального оптимуму на ПК для вирішення задач оптимального проектування та розробки оптимальних технологічних процесів.

Дисципліни, що передують вивченню «Наукові та інженерні методи проектування обладнання галузі» – вища та прикладна математика, інженерна та комп'ютерна графіка, інформатика, фізика, теоретична механіка, опір матеріалів, матеріалознавство.

Дисципліни, вивчення яких забезпечує дисципліна «Наукові та інженерні методи проектування обладнання галузі» – захист дисертаційної роботи.

**Результати навчання.** Здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії, який успішно завершив вивчення дисципліни, повинен: знати та розуміти методи наукових досліджень на рівні доктора філософії, вміти та мати навички здійснювати наукові дослідження опираючись на загальну методологію наукового пізнання з урахуванням світоглядних позицій сучасного галузевого машинобудування і його ролі у розвитку суспільств; використовувати для інформаційного забезпечення наукового пошуку сучасні інформаційні технології; здійснювати наукові дослідження, інтегруючи методи, вдаючись до абстрактного мислення для обґрунтування наукових положень і моделювання процесів; обирати та обґрунтовувати необхідні методи та засоби досліджень, розробляти комп'ютерні моделі об'єктів дослідження; розробляти методики, організовувати та проводити експериментальні дослідження, аналізувати їх результати з метою створення нового та удосконалення існуючих технологій та обладнання; обґрунтовані рішення у виборі методів розв'язання технічних проблеми; вміти логічно викладати наукові результати для їх оприлюднення у професійному середовищі; обґрунтовано оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт; вміти керувати роботою науково-дослідницького підрозділу.

## **1 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ**

---

Методичні вказівки спрямовані на допомогу здобувачам вищої освіти освітньо-наукового рівня доктора філософії спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» в засвоєнні необхідних теоретичних знань з дисципліни, набутті навичок і використанні їх на практиці, а саме при роботі над дисертацією.

Програма дисципліни передбачає вивчення таких лекційних розділів:

- Базові поняття;
- Поняття дисперсійного аналізу;
- Оптимізація об'єктів дослідження;
- Форми представлення результатів експериментальних досліджень;
- Алгоритми і способи їх описання;
- Методика підготовки і рішення задач на ПК;
- Пошук глобального оптимуму за допомогою програмних комплексів Optimization Model та Planning Experiment.

Також, робочою програмою дисципліни передбачено лабораторні роботи. Вони виконуються кожним здобувачем вищої освіти освітньо-наукового рівня доктора філософії індивідуально, на своєму робочому місці, за своїм варіантом завдання. Варіант завдання вибирається у відповідності до двох останніх цифр номера індивідуального плану. Лабораторна робота завершується оформленням звіту та її захистом і вважається зарахованою, якщо звіт містить: огляд існуючих конструкцій (механізмів, пристроїв), опис модернізованої (створеної, удосконаленої) конструкції (механізму, пристрою, вузла), математичну модель (розрахунок і дані), схеми та алгоритм математичної моделі, розрахунок за допомогою програмних комплексів OptimizationModel та PlanningExperiment, виконані правильно та акуратно, а також, якщо здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії відповів на питання викладача, показавши знання з будови та принципу роботи об'єкта досліджень і розуміння процесів, що пояснюють отримані результати.

Також, здобувач може працювати та використовувати програмні комплекси, безпосередньо, в роботі по своїй тематиці дисертаційної роботи.

## 2. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ

### 2.1. Теоретичні дослідження.

Теоретичні дослідження – це дослідження, засновані на аксіомах, законах, принципах, постулатах і теоремах [1]. Теоретичні дослідження дозволяють в значній мірі скоротити терміни і зменшити матеріальні витрати на проведення досліджень.

Завданнями теоретичного дослідження є:

- узагальнення результатів дослідження;
- знаходження загальних закономірностей шляхом обробки і інтерпретації дослідних даних;
- поширення результатів дослідження на ряд подібних об'єктів без повторення всього обсягу досліджень;
- вивчення об'єкта недоступного для безпосереднього дослідження;
- підвищення надійності експериментального дослідження об'єкта.

Теоретичне дослідження завершується формулюванням теорії.

Основним змістом теоретичних досліджень є [1]:

- вивчення фізичної природи досліджуваних об'єктів, явищ і процесів;
- побудова принципів схем досліджуваних об'єктів (наприклад, машин, машинних агрегатів і т.д.) та схем технологічних процесів;
- побудова еквівалентних схем досліджуваних процесів, наприклад, побудова еквівалентних схем машин і агрегатів, на котрих вказані точки наведених мас, осі наведених моментів інерції та інші механічні характеристики;
- побудова розрахункових моделей функціонування об'єктів дослідження;
- вирішення задач аналізу параметрів досліджуваних об'єктів.

При проведенні теоретичних досліджень, заснованих на принципах аналізу та синтезу, широко використовуються методи розділення та об'єднання елементів досліджуваної системи. У процесі розділення виділяються суттєві та несуттєві параметри, основні елементи та зв'язки між ними. Метод об'єднання елементів, навпаки, базується на комплексному підході до вивчення досліджуваних систем. Такий підхід використовується в так званій загальній теорії систем, в якій виділяють два напрямки. Перший пов'язано з розвитком теорії як філософської концепції, другий – із суворим математичним

описом закономірностей формування та розвитку будь-яких систем.

## **2.2 Моделювання процесів.**

При теоретичних дослідженнях вдаються до побудови моделей функціонування об'єктів, використовуючи для цього різні математичні методи. При цьому залежно від складності досліджуваного об'єкта та мети дослідження будують фізичні, розрахункові або математичні моделі [1].

Фізичні моделі містять повний опис поведінки об'єкта.

У моделі входять без спрощень всі відомі функціональні та інші співвідношення і зв'язки між параметрами процесу, а також отримані експериментальні дані, що стосуються розглянутих процесів. З цих причин моделі виходять невиправдано складними та не цілком визначеними, що ускладнює можливість їх застосування для вирішення завдань аналізу або синтезу.

Розрахункові моделі будують на основі припущень. При цьому складні математичні залежності, що описують процеси, замінюють наближеними (апроксимованими) співвідношеннями, деякі змінні величини – їх середніми значеннями, нелінійні вирази – лінійними і т.д. Спрощення реальних об'єктів і виконуваних ними функцій дозволяє потім використовувати при моделюванні формальні методи сучасної математики та обчислювальної техніки.

Під математичними моделями процесів розуміють розрахункові моделі, побудовані аналітичними методами або отримані експериментально. Це можуть бути також алгоритми вирішення рівнянь та складені на їх основі програми для ПК.

Залежно від методу побудови моделі поділяють на два типи: гносеологічні (пізнавальні) та інформаційні.

Гносеологічні моделі описують різні фізичні, технологічні та інші процеси, що протікають в об'єктах.

Інформаційні моделі – це математичні моделі, використовувані для вирішення завдань аналізу або синтезу параметрів систем, а також для вирішення завдань керування об'єктами або системами із застосуванням автоматизованих систем керування. У них інформація використовується для вироблення способів активних впливів на об'єкт для отримання від нього заданих (оптимальних) показників.

Математичний опис процесів практично реалізується складанням алгоритмів, за допомогою яких на ПК отримують чисельні характеристики процесів. Варіюючи вихідні дані, вдається встановити оптимальні умови процесу. Отримавши рішення, необхідно виявити

його відповідність досліджуваному об'єкту, тобто експериментально перевірити адекватність математичної моделі.

### 2.3 Методики побудови розрахункових моделей систем.

Технологічне обладнання, яке використовується в машинобудівному виробництві має різну складність по конструкції та процесами, що виконуються. Якщо обладнання оцінювати по наявності незалежних параметрів (числу ступенів свободи), то це можуть бути системи першого, другого або більш високого порядку. Для аналізу та синтезу їх параметрів будуються еквівалентні схеми та моделі функціонування.

Найпростішими системами є системи першого порядку. Їх поведінка може бути описано рівняннями виду (при постійних коефіцієнтах) [1]:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad (2.1)$$

де  $x(t)$  – змінна стану;  $u(t)$  – вхідний вплив;  $a$  і  $b$  – постійні коефіцієнти; і якщо коефіцієнти  $a$  і  $b$  є функціями часу:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t), \quad (2.2)$$

Якщо  $\dot{x}(t)$  прийняти в якості вихідної змінної, то рівняння (2.1) можна записати у вигляді:

$$y(t) = cx(t) + du(t), \quad (2.3)$$

де  $c$  і  $d$  - скалярні константи.

Нелінійні системи першого порядку зі змінними коефіцієнтами описуються диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t)], u(t), t; \\ y(t) = q[x(t)], u(t), t. \end{cases} \quad (2.4)$$

Якщо система має кілька виходів:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t]; \\ y(t) = q[x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t]. \end{cases} \quad (2.5)$$

Технічні системи, у яких маси переміщуються із прискореннями, відносяться до динамічних систем, при цьому



виникають сили інерції, рівні добутку мас на другі похідні від координат за часом. Такі системи відносяться до систем другого порядку.

Поведінка деяких систем другого порядку можна описати (при вхідній дії  $u(t)$  та вихідному сигналі  $y(t)$ ): – диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2}; \quad (2.6)$$

– двома пов'язаними диференціальними рівняннями першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1 u(t); \\ y(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2 u(t), \end{cases} \quad (2.7)$$

та рівнянням:

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + du(t). \quad (2.8)$$

Моделі функціонування реальних об'єктів, поведінка яких описується диференціальними рівняннями (2.6), можуть бути застосовані лише в окремих випадках. У загальному ж випадку такі моделі описуються диференціальними рівняннями другого порядку зі змінними коефіцієнтами (2.2). Класичний метод вирішення таких рівнянь полягає у знаходженні функцій у вигляді нескінченних поліномів та визначенні функції методом варіації постійних.

Метод інтегрування за допомогою степеневих рядів застосовується для інтегрування диференціальних нелінійних рівнянь другого та більш високого порядку, якщо рівняння необхідно спростити або рівняння не відносяться до тих видів рівнянь, методи вирішення яких відомі [1]. При цьому вважають, що шукана функція може бути представлена у вигляді:

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (2.9)$$

де  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ) – постійні коефіцієнти;  $n$  – число членів ряду;  $x_0$  і  $y_0$  – початкові значення змінних  $x$  та  $y$ .

Для застосування цього методу інтегрування, необхідно мати, наприклад, значення функції  $u(v-I)$  і похідних від неї, де  $v$  – порядок системи при заданих в даних точках значеннях аргументу.

Крім того, необхідно в кожному конкретному випадку додатково дослідити, чи виконується умова збіжності ряду.

#### 2.4 Багатомасові динамічні системи

У загальному випадку лінеаризована форма диференціального рівняння для багатомасової динамічної системи відносно вхідної  $x$  і вихідної  $y$  координат, матиме вигляд:

$$D(p)y = M(p)x. \quad (2.10)$$

Для складання диференціального рівняння, що описує поведінку всієї системи в цілому необхідно, користуючись рівняннями зв'язків виключити із рівнянь складових ланок змінні та перейти до одного рівняння, що визначає поведінку якої-небудь однієї, що цікавить дослідника, вихідної координати залежно від зовнішніх впливів, прикладених до системи. Для отримання розв'язку використовують уявлення передавальної функції через зображення шуканої функції  $f(t)$ , отриманої в результаті її перетворення за методом Лапласа:

$$L_1[f(t)] = F_L(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.11)$$

де  $s = a + i\beta$  – комплексна змінна.

Функція  $f(t)$  називається оригіналом, а функція  $F(s)$  – зображенням функції  $f(t)$ . Якщо, наприклад,  $f(t) = (1 - at) \cdot e^{-at}$  –

оригінал, то  $F_L(s) = \frac{s}{(s+a)^2}$  – зображення за Лапласом.

Методика побудови розрахункової моделі проводиться в наступній послідовності [1]: 1) побудова принципової схеми агрегату; 2) побудова еквівалентної схеми агрегату (схеми, на якій показані полюси твердих тіл, точки наведених мас та вісі наведених моментів інерції обертових мас об'єкта, вектори наведених сил, моментів та швидкостей); 3) вибір системи відліку, напрямки координатних осей та точок їх початку; 4) складання рівнянь зв'язків (стаціонарні та нестаціонарні, голономні або неголономні зв'язки); 5) вибір вихідних



проміжних співвідношень);

– стійкість моделі (здійснюється перевірка того, що варіювання вихідних даних не призведе до істотної зміни розв'язку).

### **2.6 Математичні моделі в інженерних задачах.**

Основою рішення задач аналізу та синтезу за допомогою ПК є математичні моделі проєктованих систем і їхніх складових частин. Математичні моделі являють собою інструмент інженерного дослідження, у результаті якого визначається взаємозв'язок параметрів майбутньої конструкції, оцінюються наслідки тих чи інших можливих рішень.

Формалізуємо поняття математичної моделі для деякої задачі, що розв'язується на одному з етапів проєктування. Назвемо розглянуту задачу частою задачею проєктування (ЧЗП). Кожну ЧЗП формально можна описати як задачу визначення деякого набору (вектора) параметрів  $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Назвемо параметри, що підлягають визначенню в результаті вирішення цієї ЧЗП, конструктивними. Безліч припустимих значень конструктивних параметрів  $X$  назвемо простором конструктивних параметрів та опишемо його сукупністю обмежень, яким повинні задовольняти компоненти вектора  $X$ . Серед них виділимо обмеження, що накладаються на окремі компоненти вектора  $X$ . Якщо параметр  $X_i$ , неперервний, то його значення обмежені деякою областю, якщо параметр  $X_i$ , дискретний, то безліч його можливих значень задано перерахуванням. Крім того, параметри  $X_i$  звичайно повинні знаходитися в деяких межах. Ці межі впливають із обмеженості, або виражають деякі закони збереження, або відбивають вимоги до конструкції чи проєкту.

Таким чином, вирішити ЧЗП – значить вибрати деяку точку  $X$  простору конструктивних параметрів. Кожна точка являє собою деяке технічне рішення. Для вибору варіанта найкращого з безлічі рішень треба задати деяке відношення переваги. Це можна зробити якщо сформулювати критерій ефективності ЧЗП, на основі деякого набору вихідних параметрів об'єкта. Вихідні параметри – це показники, по яких можна судити про правильність функціонування об'єкта та ступеня його відповідності своєму призначенню. До них відносять параметри продуктивності, надійності, вартості, точності, маси, габаритні розміри і т.д.

Проєктувальник намагається впливати на вихідні параметри відповідним вибором конструктивних параметрів. Але при цьому йому необхідно враховувати вплив на вихідні параметри параметрів,

некерованих у цієї ЧЗП.

Некеровані параметри деякої ЧЗП – це параметри середовища, у якій працює проєктований об'єкт, а також параметри, що були обрані в ході рішення попередніх ЧЗП, або параметри, що будуть вибиратися в наступних ЧЗП. У практиці проєктування складних систем найбільш типовим є випадок, у якому одні компоненти вектора некерованих параметрів фіксовані та відомі проєктувальнику, інші – випадкові величини із заданими параметрами функцій розподілу, а треті невизначені (скажемо, задаються областю можливих значень) [2].

### 2.7 Аналітичні методи в наукових дослідженнях.

Передавальна функція і частотна характеристика системи.

Поведінка деяких технічних систем і їх вихідне значення можна описати диференціальним рівнянням із постійними або змінними коефіцієнтами [1]:

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x &= \\ &= b_m f^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{f}(t) + b_0 f(t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

де  $f(t)$  – зовнішні (вхідні) детерміновані впливи;  $f^{(m)}(t)$ ,  $\dot{f}(t)$  – похідні від зовнішнього впливу  $f(t)$ .

При постійних коефіцієнтах загальний інтеграл цього рівняння складається із двох частин: загального інтеграла рівняння без правої частини та часткового інтеграла рівняння, що представляє собою вираз, який при підстановці його в ліву частину рівняння перетворює його в тотожність.

При постійних коефіцієнтах  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  рішення однорідного рівняння  $a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$  має вигляд  $x_{cb} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$ , якщо всі корені різні. Рішення другої частини потрібно шукати у вигляді зазначеного вище виразу.

При оцінці динамічних властивостей досліджуваних систем для спрощення приймають, що вхідний вплив  $f(t)$  являє собою гармонійну функцію часу, тобто функція  $f(t)$  матиме вигляд:

$$A(t) = A_0 [\cos(\omega t + \varphi_0)], \quad (2.14)$$

де  $A_0$  – амплітуда;  $\omega$  – кутова частота;  $\varphi_0$  – фаза.

Якщо фаза дорівнює нулю, то

$$A(t) = A_0 \cos \omega t = \frac{A_0}{2} e^{j\omega t} + \frac{A_0}{2} e^{-j\omega t}, \quad (2.15)$$

при  $j = \sqrt{-1}$ .

Тоді часткові рішення рівняння (2.13) при постійних значеннях коефіцієнтів будуть мати вигляд:

$$x_{1b} = \frac{f_0}{2} \Phi(j\omega) e^{j\omega t}; \quad (2.16)$$

$$x_{2b} = \frac{f_0}{2} \Phi(-j\omega) e^{-j\omega t}. \quad (2.17)$$

З урахуванням підстановки виразу (2.16) в (2.13) та відділення в чисельнику і знаменнику цього виразу дійсної частини від уявної, отримаємо:

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.18)$$

де

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{bc - ad}{ac - bd}\right) = \arctg\left[\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right];$$

$$P(\omega) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = A(\omega) \cos \varphi(\omega); Q(\omega) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

Функція  $\Phi(j\omega)$  називається передавальною функцією.

Значення передавальної функції можна отримати також у вигляді відношення зображень по Лапласу вихідної та вхідної величин, тобто за допомогою виразу:

$$F(p) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-pt} dt, \quad (2.19)$$

де  $\psi(t)$  – оригінал функції;  $F(p)$  – її зображення;  $p = s + i\omega$  – комплексна змінна ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Застосувавши перетворення Лапласа (2.19) до рівняння (2.13), отримаємо

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}. \quad (2.20)$$

Отже, передавальна функція являє собою відношення зображення вихідної координати до зображення вхідної координати при нульових початкових умовах.

Для характеристики поведінки динамічних систем вдаються зазвичай до стандартного гармонійного впливу. Для того щоб отримати значення передавальної функції, достатньо в передавальну функцію системи замість  $S$  підставити  $j\omega$ , тобто

$$W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}. \quad (2.21)$$

Такого виду передавальна функція називається частковою. Цю функцію можна перетворити до такого виду:

$$W(j\omega) = V(\omega) + iV(\omega), \quad (2.22)$$

де  $V(\omega)$  і  $iV(\omega)$  – дійсна та уявна складові часткової передавальної функції.

Наприклад, 
$$W(j\omega) = \frac{b_2 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0}, \quad \text{тоді}$$

$$V(\omega) = \frac{AB + a_1 b_1 \omega^2}{B^2 + a_1^2 \omega^2} \quad \text{та} \quad iV(\omega) = \frac{Bb_1 + Aa_1}{B^2 + a_1^2 \omega^2},$$

де  $A = b_0 - b_1 \omega^2, B = a_0 - \omega^2$ .

Таким чином, поведінку системи, тобто значення координат, можна досліджувати на підставі зміни значень передавальної функції  $W(a_1, a_2, b_0, b_1, b_2)$ , яка є оператором динамічних систем.

Якщо функція  $f(x)$  є випадковою, то необхідно шукати стаціонарне рішення диференціального рівняння із постійними коефіцієнтами, засноване на теорії випадкових функцій. Згідно цієї теорії, слід шукати не значення самої координати, а щільність

розподілу ймовірностей цієї координати.

Передавальні та часткові функції використовуються, наприклад, для дослідження систем автоматичного керування та вібросійкості процесу різання.

### 2.8 Поняття функціоналу і варіаційного числення.

Значення того чи іншого показника (процесу), властивого цій динамічній системі, можна виразити аналітично. Зазвичай інтенсивність зміни показника визначається значенням першої похідної останнього за відповідними змінним. При цьому значення похідної може залежати не тільки від аргументів, а й від самих функцій та похідних від функцій по аргументам. Так, у разі однієї незалежної змінної маємо [1]:  $\frac{dJ}{dx} = F(x, y, y')$ .

Звідки

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx. \quad (2.23)$$

Функція  $F$  залежить не тільки від аргументу  $x$ , а й від самої функції та її похідних. Такого роду функції називаються функціоналами. Завдання при цьому полягає в тому, щоб відшукати таку функцію  $y=f(x)$ , при якій функціонал  $J$  від тих чи інших параметрів і показників процесу, властивих цій системі, брав би

екстремальне значення  $J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \min(\text{або } \max)$ .

Одним із найпростіших методів, за допомогою яких можна вирішити цю задачу, є прямий метод варіаційного числення або метод Рітца. Метод полягає в тому, що значення деякого функціоналу  $J$  розглядається на всіляких лінійних комбінаціях:

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x), \quad (2.24)$$

з постійними коефіцієнтами, складеними з  $n$  перших функцій деякої обраної послідовності  $W_1(x)$ , ...,  $W_n(x)$ , що задовольняють початковим умовам.



При цьому коефіцієнти  $\alpha_i$  повинні бути вибрані так, щоб функціонал  $J$  досягав екстремуму, тобто  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  повинні бути визначені з системи рівнянь  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ , де  $\varphi = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  – функція, в яку перетворюється функціонал  $J$  на лінійних комбінаціях (2.24). При  $n \rightarrow \infty$  у разі існування границі функції виходить точне, а при обмеженому  $n$  – наближене рішення.

Задача визначення екстремуму функцій значно ускладнюється, якщо величина, екстремальне значення якої потрібно визначити, виражається через функціонал. Для вирішення такого роду завдань застосовуються: метод варіаційного числення, принцип максимуму та метод динамічного програмування.

Основним завданням варіаційного числення є знаходження екстремуму функціоналу (2.23). Передбачається, що функція  $F$  є однозначною та безперервною разом із своїми частковими похідними до третього порядку включно при всіх значеннях  $x$  та  $y$  в деякій області  $R$  площини і при всіх кінцевих значеннях  $y', y = y_0$  при  $f(x) = f(x_0)$ ;  $y = y_1$ , при  $f(x) = f(x_1)$ . Вирішити завдання можна, застосувавши рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \text{ або } \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (2.25)$$

У загальному випадку, якщо функція  $F(x, y, y')$  дійсно містить  $y'$ , то рівняння Ейлера (2.25) є рівнянням другого порядку та його загальний інтеграл  $f_1(x, C_1, C_2)$  містить дві довільні постійні  $C_1$  і  $C_2$ , які визначаються із умов, що крива проходить через задані точки  $(x_0, y_0)$  і  $(x_1, y_1)$ .

Для визначення характеру екстремуму служить умова Лежандра, згідно з якою при  $F_{yy} \geq 0$  має місце мінімум, а при  $F_{yy} \leq 0$  – максимум. У літературі [1] наведено розв'язок знаходження екстремуму інтеграла від функціоналу, коли функціонал залежить від декількох змінних і перших похідних від них за часом або функції, що доставляють екстремум функціоналу, самі підпорядковані додатковим умовам, тобто має місце умовний екстремум.

Метод динамічного програмування застосовується для вирішення задач оптимального керування системами, поведінка яких описується за допомогою диференціальних рівнянь. Особливість методу полягає в тому, що для знаходження оптимального керування досліджувана операція розбивається на ряд послідовних кроків. При

цьому функціонал, що характеризує якість роботи динамічної системи, виражається сумою функціоналів на кожному кроці  $J = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n, u_n)$

[1]. Оптимальне значення функціоналу  $J_i^*(x_i)$  на будь-якому  $i$ -му кроці визначається зі співвідношення:

$$\begin{aligned} J_i^*(x_i) &= \min \{ f_0(x_i, u_i) + J_{i+1}^* [x_i + f(x_i, u_i)] \} = \\ &= \{ f_0(x_i, u_i^*) + J_{i+1}^* [x_i + f(x_i, u_i^*)] \}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

де  $u_i^*$  – оптимальний керуючий вплив;  $x_i$  – значення координат.

### 3. ПОНЯТТЯ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

У будь-якому експерименті середні значення спостережуваних величин змінюються у зв'язку зі зміною основних факторів (якісних та кількісних), що визначають умови досліду, а також випадкових факторів. Дослідження впливу тих чи інших факторів на мінливість середніх є завданням дисперсійного аналізу [1, 2].

Щоб вирішити, чи значимий вплив цього фактора, необхідно оцінити значимість відповідної вибіркової дисперсії в порівнянні з дисперсією відтворюваності, обумовленої випадковими факторами. Перевірка значущості оцінок дисперсій проводиться за критерієм Фішера. Якщо розраховане значення критерію Фішера виявиться менше табличного, то вплив розглянутого фактора немає підстав вважати значущим. В іншому випадку розглянутий фактор впливає на мінливість середніх. Надалі будемо вважати, що виконуються такі припущення: 1) випадкові помилки спостережень мають нормальний розподіл; 2) фактори впливають тільки на зміну середніх значень, а дисперсія спостережень залишається постійною; експерименти рівно точні.

Вимога нормального розподілу визначає вибір основних факторів при дослідженні процесу методом дисперсійного аналізу. Якщо потрібно одержати нормальний розподіл вихідної величини, до випадкових бажано відносити тільки ті фактори, вплив яких на вихідну величину дуже малий. Виняток можна робити лише для тих чинників, які самі по собі дають нормальний розподіл результатів [1].

Фактори, що розглядаються в дисперсійному аналізі, бувають двох родів: з випадковими рівнями та з фіксованими. У першому випадку передбачається, що вибір рівнів проводиться із нескінченної сукупності можливих рівнів та супроводжується рандомізацією. При цьому результати експерименту мають більше значення, оскільки висновки по експерименту можна поширити на всю генеральну сукупність. Якщо всі рівні вибираються випадковим чином, то математична модель експерименту називається моделлю із випадковими рівнями факторів (випадкова модель). Коли всі рівні фіксовані, модель називається моделлю з фіксованими рівнями факторів. Коли частина факторів розглядається на фіксованих рівнях, а рівні інших вибираються випадковим чином, модель називається моделлю змішаного типу [2].

Залежно від числа джерел дисперсії розрізняють однофакторний та багатфакторний дисперсійний аналіз.

### 3.1 Однофакторний дисперсійний аналіз.

**Приклад 1.** Дослідити вплив технології обробки заготовки на шорсткість поверхні готової деталі. Технологію будемо називати фактором, а кожен конкретну технологію  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) – рівнем цього чинника,  $m$  – повне число застосовуваних технологій.

Позначимо  $x_{ij}$  – шорсткість поверхні деталі, отриману в  $j$ -му експерименті при використанні  $i$ -ї технології,  $T_i$  ( $j = 1, 2, \dots, n_i$ ),  $n_i$  – число годин, протягом яких проводилися спостереження із використанням технології  $T_i$ . Зведемо всі дані в таблицю 3.1.

**Таблиця 3.1 – Приклад план-експерименту**

|       | 1        | 2        | 3        | ... | $n$       |
|-------|----------|----------|----------|-----|-----------|
| $T_1$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | ... | $x_{1n1}$ |
| $T_2$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | ... | $x_{2n2}$ |
| ...   | ...      | ...      | ...      | ... | ...       |
| $T_m$ | $x_{m1}$ | $x_{m2}$ | $x_{m3}$ | ... | $x_{mnm}$ |

Розглянемо математичну модель, в якій передбачається, що кожна випадкова величина  $x_{ij}$  може бути представлена у вигляді  $x_{ij}=a_i+\varepsilon_{ij}$ , де  $a_i$  – шорсткість, характерна для технології  $T_i$ , а  $\varepsilon_{ij}$  – незалежні випадкові величини, які описують сумарний внесок усіх випадкових факторів, що впливають на підсумкову шорсткість. Найчастіше вважають, що всі  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$ , тобто мають нормальний розподіл з нульовим математичним очікуванням та з однаковою

дисперсією  $\sigma^2$ .

Необхідно з'ясувати, чи впливає вибір технології обробки заготовки на шорсткість поверхні чи ні. На математичній мові це означає, що за результатами експерименту необхідно перевірити справедливність статистичної гіпотези  $H_0$  про те, що всі технології  $T_i$  однаково ефективні,  $H_0: a_1=a_2=\dots=a_n$ . Аналіз результатів буде заснований на зіставленні двох оцінок невідомої дисперсії  $\sigma^2$  [2].

Одна з цих оцінок не залежить від того, чи вірна гіпотеза  $H_0$ . Для іншої оцінки це припущення істотно, тобто ця оцінка буде близька до значенням  $\sigma^2$  тільки тоді, коли гіпотеза  $H_0$  вірна. Якщо обидві оцінки близькі, то гіпотезу  $H_0$  слід прийняти. Якщо ж оцінки істотно відрізняються, то гіпотезу  $H_0$  слід відкинути.

Побудуємо ці оцінки. Спочатку для кожного рядка обчислимо середні  $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, i=1,2,\dots,m$ , а потім величину  $s_1^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$ .

При зроблених припущеннях про випадкових величинах  $\epsilon_{ij}$  величина  $s_1^2/\sigma^2$  має  $\chi^2$ -розподіл з  $nm$  ступенями свободи незалежно від того, чи вірна гіпотеза  $H_0$ . Отже, перша оцінка для  $\sigma^2$  отримана.

Для отримання другої оцінки спочатку знайдемо величину

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \text{ де } n = n_1 + n_2 + \dots + n_m; s_2^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

При виконанні гіпотези  $H_0$  величини  $s_1^2$  та  $s_2^2$  незалежні, а величина  $s_2^2/\sigma^2$  має  $\chi^2$ -розподіл з  $n-1$  ступенями свободи. Тепер порівняємо оцінки  $s_1^2$  і  $s_2^2$ . Якщо гіпотеза  $H_0$  вірна, то величина

$$F_H = \frac{\frac{s_2^2}{n-1}}{\frac{s_1^2}{n-m}} = \frac{s_2^2(n-m)}{s_1^2(n-1)}$$

$n-m$

має розподіл Фішера з  $n-1$  та  $nm$  ступенями свободи. Розподіл Фішера характеризується двома параметрами: числом ступенів свободи чисельника і числом ступенів свободи знаменника. Заданою досить малим рівнем значущості  $\alpha$  і вирішимо рівняння  $F_{n-1, n-m}(x) = 1-\alpha$ . Порівняємо корінь цього рівняння  $x_\alpha$  з обчисленим вище значенням  $F_H$ . При  $F_H > x_\alpha$  гіпотеза  $H_0$  відкидається, в іншому випадку – приймається.

З'ясуємо на рівні значущості  $\alpha=0,05$  чи залежить шорсткість поверхні готової деталі від технології обробки заготовки, за результатами, наведеними в таблиці 3.2.

**Таблиця 3.2 – Результати експерименту**

| Номер технології | Години |     |     |     |     |     | $n_i$ |
|------------------|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
|                  | 1      | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |       |
| 1                | 140    | 141 | 140 | 141 | 142 | 145 | 6     |
| 2                | 150    | 149 | 150 | 147 |     |     | 4     |
| 3                | 147    | 147 | 145 | 150 | 150 |     | 5     |
| 4                | 144    | 147 | 142 | 146 |     |     | 4     |

Фрагмент документа **Mathcad**, що містить відповідні обчислення, приведений нижче.

ORIGIN:= 1

$$x_{1,1} := 140 \quad x_{1,2} := 141 \quad x_{1,3} := 140 \quad x_{1,4} := 141 \quad x_{1,5} := 142 \quad x_{1,6} := 145 \quad n_1 := 6$$

$$x_{2,1} := 150 \quad x_{2,2} := 149 \quad x_{2,3} := 150 \quad x_{2,4} := 147 \quad n_2 := 4$$

$$x_{3,1} := 147 \quad x_{3,2} := 147 \quad x_{3,3} := 145 \quad x_{3,4} := 150 \quad x_{3,5} := 150 \quad n_3 := 5$$

$$x_{4,1} := 144 \quad x_{4,2} := 147 \quad x_{4,3} := 142 \quad x_{4,4} := 146 \quad n_4 := 4$$

$$m := 4 \quad N := \sum_{i=1}^m n_i \quad N = 19 \quad i := 1..m$$

$$X_i := \frac{1}{n_i} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} \quad s1 := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{i,j} - X_i)^2$$

$$XN := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} \quad s2 := \sum_{i=1}^m n_i \cdot (XN - X_i)^2$$

$$s1 := 57.05 \quad s2 := 173.582 \quad FN := \frac{s2 \cdot (N - m)}{s1 \cdot (N - 1)} \quad FN := 2.536$$

$$\alpha := 0.05 \quad \chi\alpha := qF(1 - \alpha, N - 1, N - m) \quad \chi\alpha = 2.353$$

$$r2 := \frac{s2}{s1} \quad r2 = 3.043$$

**Рис. 3.1 – Фрагмент документа Mathcad з обчисленнями**

Для того щоб знайти розв'язок рівняння  $F_{n-1, n-m}(x) = 1 - \alpha$  використовують функцію  $qF(p, d_1, d_2)$  із параметрами  $p = 1 - \alpha$ ,  $d_1 = n - 1$ ,  $d_2 = n - m$ , значенням якої є шуканий корінь рівняння [2].

У результаті обчислень отримано  $F_n = 2,536$  та  $x_\alpha = 2,353$ , тобто  $F_n > x_\alpha$ , то гіпотеза  $H_0$  відкидається. Впливає, що вибір технології впливає на шорсткість. Наступне завдання – оцінити ступінь цього впливу.

Для оцінки ступеня впливу фактора використовують вибірковий коефіцієнт детермінації  $r^2$ , який обчислюється за

$$\text{формулою } r^2 = s_2^2 / s^2, \text{ де } s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \text{ – оцінка повної}$$

вибіркової дисперсії.

Коефіцієнт детермінації  $r^2$  показує, яку частину в загальній дисперсії величин  $x_{ij}$  складає частина, обумовлена залежністю від фактора  $T$ .

У розглянутому вище прикладі  $r^2 = 0,753$ , тобто 75,3% загальної варіації шорсткості обумовлені технологією.

Отримані результати дозволяють оцінити параметри вихідної моделі.

Якщо гіпотеза  $H_0$  приймається, тобто  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ , то оцінкою параметра  $\alpha$  (математичного очікування) є величина  $\bar{x}$ , а оцінкою дисперсії  $\sigma^2$  – величина  $s_1^2 / n - m$ .

Якщо гіпотеза  $H_0$  відкидається, то оцінкою  $\alpha_i$  є  $\bar{x}_i$ , а оцінкою дисперсії  $\sigma^2$  для всіх рівнів – величина  $s_1^2 / n - m$ . Ефект впливу  $i$ -го рівня можна обчислювати за формулою  $x_i - \bar{x}$ .

Нижче наведені обчислення коефіцієнта детермінації та оцінок параметрів розподілів кожного рівня для розглянутого вище прикладу про вплив технології обробки заготовки на шорсткість поверхні готового виробу.

$$\begin{array}{llll} r^2 := \frac{s_2}{s_1 + s_2} & r^2 := 0.756 & a_i := x_i & a = \begin{bmatrix} 141.5 \\ 149 \\ 147.8 \\ 144.75 \end{bmatrix} \\ \sigma^2 := \frac{s_1}{N - m} & \sigma := \sqrt{\sigma^2} & \sigma := 1.95 & \end{array}$$

**Рис. 3.2 – Фрагмент документа Mathcad із обчисленнями**

З наведених обчислень випливає, наприклад, що шорсткість поверхні при другій технології обробки являє собою випадкову величину, що має нормальний розподіл  $N(149, 1,95)$ . На рис. 3.3 наведені графіки щільності ймовірностей шорсткості для всіх чотирьох технологій обробки.

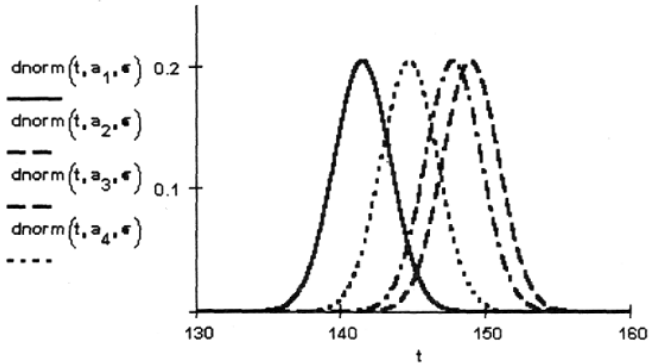


Рис. 3.3 – Графіки щільності ймовірностей шорсткості

### 3.2 Двохфакторний дисперсійний аналіз.

Розглянуто в розділі 3.1 методику однофакторного аналізу, можна застосувати і для двох факторів.

Нехай випадкова величина  $\xi$  залежить від двох ознак (факторів):  $A$  та  $B$ . Позначимо  $A_i, i=1, 2, \dots, m_A; B_j, j=1, 2, \dots, m_B$  – рівні факторів  $A$  та  $B$  відповідно. Результати вимірювання випадкової величини  $\xi$  представлені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Результати вимірювання випадкової величини

|       | 1         | 2         | 3         | ... | $m_B$        |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----|--------------|
| 1     | $x_{11}$  | $x_{12}$  | $x_{13}$  | ... | $x_{1m_B}$   |
| 2     | $x_{21}$  | $x_{22}$  | $x_{23}$  | ... | $x_{2m_B}$   |
| ...   | ...       | ...       | ...       | ... | ...          |
| $m_A$ | $x_{mA1}$ | $x_{mA2}$ | $x_{mA3}$ | ... | $x_{mA m_B}$ |

Для простоти зупинимося на випадку, коли в кожній клітині таблиці, тобто при кожному поєднанні рівнів факторів, приведений результат тільки одного спостереження (вимірювання). Тоді загальне число спостережень  $n=m_A m_B$ .

Позначимо через  $a_i$  математичне очікування  $\xi$  при рівні  $A, i=1, 2, \dots, m_A$ ; через  $b_j$  – математичне очікування  $\xi$  при рівні  $B, j=1, 2, \dots, m_B$ . Якщо при зміні фактора  $A$  зберігається рівність  $a_1=a_2=\dots=a_{m_A}$ , то величина  $\xi$  не залежить від фактора  $A$ ; в іншому випадку,  $\xi$  залежить від фактора  $A$ . Аналогічно визначається залежність від фактора  $B$ .

Слід перевірити наступні гіпотези:  $H_A: a_1=a_2=\dots=a_{m_A}$  і  $H_B: b_1=b_2=\dots=b_{m_B}$ . При вирішенні завдання будемо припускати, що виконуються наступні умови:

- спостереження при різних поєднаннях рівнів факторів незалежні;
- при всіх поєднаннях рівнів факторів випадкова величина  $\xi$  нормально розподілена з однією і тією ж дисперсією  $\sigma^2$ .

Мінливість спостережуваних факторів при переході від однієї клітини таблиці до іншої може бути обумовлена зміною рівнів факторів і випадковими неконтрольованими факторами. Мінливість, викликана випадковими неконтрольованими факторами, називається залишковою.

Обчислимо загальну середню результатів вимірювань за формулою  $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m_A} \sum_{j=1}^{m_B} x_{ij}$ . Цю величину можна представити в іншій формі, що використовує групові середні  $\bar{x}_i$  та  $\bar{x}_j$ :

$$\bar{x}_i = \frac{1}{m_B} \sum_{j=1}^{m_B} x_{ij}; \bar{x}_j = \frac{1}{m_A} \sum_{i=1}^{m_A} x_{ij}. \quad (3.1)$$

Точка в індексі величини  $x_i$  означає, що підсумовування ведеться по  $i$ -ому рядку, а точка в індексі величини  $x_j$  – що підсумовування ведеться по  $j$ -му стовпцю. У цих позначеннях середнє результатів вимірювань обчислюється за будь-якою із формул [2, 3]:

$$\bar{x} = \frac{m_B}{n} \sum_{i=1}^{m_A} \bar{x}_i; \bar{x} = \frac{m_A}{n} \sum_{j=1}^{m_B} \bar{x}_j. \quad (3.2)$$

Середня мінливість, викликана фактором  $A$ , обчислюється за формулою  $\sigma_A^2 = \frac{m_B}{n} \sum_{i=1}^{m_A} (\bar{x}_i - \bar{x})^2$ . Аналогічно для мінливості,

викликаної фактором  $B$ :  $\sigma_B^2 = \frac{m_A}{n} \sum_{j=1}^{m_B} (\bar{x}_j - \bar{x})^2$ .

Для загальної характеристики мінливості, обумовленої випадковими факторами, обчислюємо:



$$\sigma_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m_A} \sum_{j=1}^{m_B} (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x})^2. \quad (3.3)$$

Загальну мінливість величини  $\xi$  характеризують величиною

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m_A} \sum_{j=1}^{m_B} (\bar{x}_{ij} - \bar{x})^2; \sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_0^2.$$

За співвідношенням між  $\sigma_A^2$ ,  $\sigma_B^2$ ,  $\sigma_0^2$  можна судити про ступінь впливу факторів на випадкову величину  $\xi$ . Перевірка гіпотези  $H_A$  ґрунтується на порівнянні величин  $\sigma_A^2$  і  $\sigma_0^2$ . Якщо гіпотеза  $H_A$  вірна, то величина  $F_A = \sigma_A^2 / \sigma_0^2$  має розподіл Фішера зі ступенями свободи  $k = m_A - 1$  і  $l = (m_A - 1)(m_B - 1)$ .

Задамося рівнем значущості  $\alpha$  та знайдемо правобічну критичну точку  $x_\alpha$  – рішення рівняння  $F_{k, l}(x_\alpha) = 1 - \alpha$ . Якщо значення  $F_A$ , обчислене за результатами вимірювань, задовольняє нерівності  $F_A < x_\alpha$ , то гіпотеза  $H_A$  приймається. В іншому випадку гіпотеза  $H_A$  відкидається, і можна зробити висновок, що зміна фактора  $A$  впливає на зміну величини  $\xi$ . Мірою цього впливу є коефіцієнт детермінації  $r_A^2 = \sigma_A^2 / \sigma^2$ , який показує, яка частка загальної мінливості величини  $\xi$  обумовлена зміною фактора  $A$ .

Аналогічно перевіряється гіпотеза  $H_B$ , яка ґрунтується на порівнянні величин  $\sigma_B^2$  та  $\sigma_0^2$ . Якщо гіпотеза  $H_B$  вірна, то величина  $F_B = \sigma_B^2 / \sigma_0^2$  має розподіл Фішера зі ступенями свободи  $k = m_B - 1$  та  $l = (m_A - 1)(m_B - 1)$ . При рівні значущості  $\alpha$  правобічна критична точка  $x_\alpha$  – рішення рівняння  $F_{k, l}(x_\alpha) = 1 - \alpha$ . Якщо значення  $F_B$ , обчислене за результатами вимірювань, задовольняє нерівності  $F_B < x_\alpha$ , то гіпотеза  $H_B$  приймається. В іншому випадку, гіпотеза  $H_B$  відкидається, і можна зробити висновок, що зміна фактора  $B$  впливає на зміну величини  $\xi$ . Мірою цього впливу є коефіцієнт детермінації  $r_B^2 = \sigma_B^2 / \sigma^2$ , який показує, яка частка загальної мінливості величини  $\xi$  обумовлена зміною фактора  $B$ .

В рамках двохфакторного дисперсійного аналізу можна отримати більш конкретне уявлення про випадкову величину  $\xi$ . Її модель на  $i$ -му рівні фактора  $A$  та на  $j$ -му рівні фактора  $B$  матиме вигляд  $\xi_{ij} = a + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_A$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_B$ , де  $a$  – генеральне середнє випадкової величини  $\xi$ ;  $\alpha_i$  – складова, яка описує ефект впливу фактора  $A$  на випадкову величину  $\xi$  на  $i$ -му рівні фактора  $A$ ;  $\beta_j$  – складова, яка описує ефект впливу фактора  $B$  на випадкову величину  $\xi$  на  $j$ -му рівні

фактора  $B$ ;  $\varepsilon_{ij}$  – складова, яка описує ефект впливу випадкових факторів.

Величини  $\varepsilon_{ij}$  – незалежні випадкові величини, що мають однакове нормальний розподіл  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$ ,  $i=1,2,\dots,m_A$ ,  $j=1,2,\dots,m_B$ .

Якщо гіпотези  $H_A$  та  $H_B$  не відкидати, то в розглянутій моделі параметри  $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_{m_A}=0$  та  $\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_{m_B}=0$ .

Величина  $x$  являє собою оцінку параметра  $a$ , а величина  $\frac{s_0^2}{(m_A-1)(m_B-1)}$  незміщену оцінку параметра  $\sigma^2$ .

Якщо гіпотези  $H_A$  та  $H_B$  відкидаються, то:

- оцінка параметра  $a$  дорівнює  $x$ ;
- оцінка параметра  $\alpha_i$  дорівнює  $x_{i-x}$ ;
- оцінка параметра  $\beta_j$  дорівнює  $x_{j-x}$ ;

– незміщена оцінка параметра  $\sigma^2$  дорівнює  $\frac{s_0^2}{(m_A-1)(m_B-1)}$ .

**Приклад 2.** Провести двофакторний дисперсійний аналіз таблиці 3.4.

**Таблиця 3.4 – Завдання для аналізу**

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 10,9  | 11,1  | 9,9   | 11,51 |
| $A_2$ | 13,1  | 15,2  | 14,8  | 14,9  |
| $A_3$ | 17,3  | 18,0  | 19,6  | 19,3  |

Фрагмент робочого документа **Mathcad** наведено нижче [2].

ORIGIN:= 1

mA:=3 mB:=4 α:=0.05 n:=mA·mB

$$x := \begin{pmatrix} 10.9 & 11.1 & 9.9 & 11.51 \\ 13.3 & 15.2 & 14.8 & 14.9 \\ 17.3 & 18.0 & 19.6 & 19.3 \end{pmatrix} \quad i := 1..mA \quad j := 1..mB$$

$$XS := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{mA} \sum_{j=1}^{mB} x_{i,j} \quad XS = 14.651$$

$$XA_i := \frac{1}{mB} \cdot \sum_{j=1}^{mB} x_{i,j} \quad XA^T = (10.852 \quad 14.55 \quad 18.55)$$

$$XB_j := \frac{1}{mA} \cdot \sum_{i=1}^{mA} x_{i,j} \quad XB^T = (13.833 \quad 14.767 \quad 14.767 \quad 15.237)$$

$$\sigma_A := \frac{mB}{n} \cdot \sum_{i=1}^{mA} (XA_i - XS)^2 \quad \sigma_A = 9.88$$

$$\sigma_B := \frac{mA}{n} \cdot \sum_{j=1}^{mB} (XB_j - XS)^2 \quad \sigma_B = 0.26$$

$$\sigma_0 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{mB} \sum_{i=1}^{mA} (x_{i,j} - XA_i - XB_j + XS)^2 \quad \sigma_0 = 0.332$$

$$\sigma := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{mB} \sum_{i=1}^{mA} (x_{i,j} - XS)^2 \quad \sigma = 10.472$$

$$FA := \frac{\sigma_A}{\sigma_0} \quad FA = 29.73 \quad qF[1 - \alpha, mA - 1, (mA - 1) \cdot (mB - 1)] = 5.143$$

Рис. 3.4 – Фрагмент документа Mathcad з обчисленнями [2]

Гіпотеза  $H_A$  про те, що величина  $x$  не залежить від фактора  $A$  відкидається

$$r_A := \frac{\sigma_A}{\sigma} \quad r_A = 0.943 \quad FB = 0.781 \quad qF[1 - \alpha, mB - 1, (mA - 1) \cdot (mB - 1)] = 4.757.$$

Гіпотеза  $H_B$  про те, що величина  $x$  не залежить від фактора  $B$  приймається

$$r_B := \frac{\sigma_B}{\sigma} \quad r_B = 0.025 \quad a := XS \quad a = 14.651 \quad \sigma_2 := \frac{\sigma_0 \cdot n}{(mA - 1) \cdot (mB - 1)} \quad \sigma_2 = 0.665.$$

Коефіцієнт детермінації для фактора  $A$  дорівнює  $r_A=0,943$ . Це означає, що більше 94% мінливості досліджуваної випадкової величини обумовлено зміною цього фактора. На частку фактора  $B$  припадає тільки 2,5% мінливості, оскільки  $r_B=0,025$ .

Незалежність  $\xi$  від фактора  $B$  дозволяє побудувати уточнену модель досліджуваної випадкової величини у вигляді  $\xi_{ij}=x_i+\varepsilon_{ij}$ ,  $i=j=1,2,3$ , де  $\xi_{ij}$  – незалежні випадкові величини, розподілені нормально з нульовим математичним очікуванням і дисперсією  $\sigma^2=0,665$ .

З урахуванням вищевикладеного матриця, що описує вплив факторів на досліджуване явище, матиме наступний вигляд:

|       | $B_1$  | $B_2$  | $B_3$  | $B_4$  |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| $A_1$ | 10,852 | 10,852 | 10,852 | 10,852 |
| $A_2$ | 14,55  | 14,55  | 14,55  | 14,55  |
| $A_3$ | 18,55  | 18,55  | 18,55  | 18,55  |

Інша частина елементів вихідної матриці обумовлена випадковими чинниками. Так, наприклад, на рівнях  $A_2$  та  $B_3$  випадкова величина  $\xi_{23}$  має нормальний розподіл  $N(14,55, \sqrt{0,66}) = N(14,55, 0,81)$ .

### 3.3 Повний факторний експеримент.

План експерименту, що містить всі можливі комбінації всіх факторів на певному числі рівнів, рівне число разів, називається повним факторним планом. Якщо число факторів відомо, можна відразу знайти число дослідів, необхідних для реалізації всіх можливих поєднань рівнів факторів:  $N=p^k$ , де  $p$  – число рівнів фактора;  $k$  – число факторів.

Якщо число рівнів кожного фактора дорівнює двом, то маємо повний факторний план експерименту типу  $2^k$ . Геометричною інтерпретацією повного факторного плану  $2^k$  є квадрат, центр якого – основний рівень фактора, а сторони паралельні осям координат і рівні подвоєному інтервалу його зміни.

Матриця планування експерименту типу  $2^k$  представлена в табл. 3.5. Стовпці в матриці називаються вектор-стовпцями, а рядки – вектор-рядками.

**Таблиця 3.5 – Матриця планування двофакторного експерименту**

| Номер досліді | $x_1$ | $x_2$ | $y$   |
|---------------|-------|-------|-------|
| 1             | +1    | -1    | $y_1$ |
| 2             | -1    | -1    | $y_2$ |

|   |    |    |       |
|---|----|----|-------|
| 3 | +1 | +1 | $y_3$ |
| 4 | -1 | +1 | $y_4$ |

У випадку двох факторів всі можливі комбінації їх рівнів можна знайти прямим перебором, але з ростом числа факторів виникає необхідність у знанні деяких прийомів побудови матриць.

**Таблиця 3.6 – Матриця планування трифакторного експерименту**

| Номер досліджу | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y$   |
|----------------|-------|-------|-------|-------|
| 1              | -1    | -1    | +1    | $y_1$ |
| 2              | +1    | -1    | +1    | $y_2$ |
| 3              | -1    | +1    | +1    | $y_3$ |
| 4              | +1    | +1    | +1    | $y_4$ |
| 5              | -1    | -1    | -1    | $y_5$ |
| 6              | +1    | -1    | -1    | $y_6$ |
| 7              | -1    | +1    | -1    | $y_7$ |
| 8              | +1    | +1    | -1    | $y_8$ |

Зазвичай використовуються три основні прийоми, засновані на переході від матриць меншої розмірності до матриць більшої розмірності [4]:

- для нового фактора вихідний план записується з урахуванням нижнього і верхнього рівнів цього чинника (при переході від плану  $2^2$  до  $2^3$  побудова матриці показано в табл. 3.6);

- використовується чергування знаків (в першому стовпці матриці знаки змінюються по черговому, у другому вони чергуються через 2, в третьому – через 4, в четвертому – через 8 і т.д. (відповідно зростанню ступеня числа 2), табл. 3.6 також є прикладом реалізації цього прийому;

- використовується правило перемноження стовпців матриці (при порядковому перемноженні елементів двох стовпців матриці добуток одиниць з однойменними знаками дає +1, а з різнойменними -1; для розглянутого випадку отримаємо вектор-стовпець добутків  $x_1x_2$  у вихідному плані, при повторенні вихідного плану у стовпця добутків знаки поміняємо на зворотні). Цей прийом можна перенести на побудову матриць будь-якої розмірності, однак він складніше, ніж перші два.

Дві властивості плану  $2^k$  слідують безпосередньо із побудови його матриці: 1) симетричність щодо центру експерименту:

алгебраїчна сума елементів кожного вектор-стовпця матриці (рівнів кожного фактора) дорівнює нулю:  $\sum_{i=1}^N x_{ij} = 0$ , де  $x_{ij}$  – рівень  $j$ -го фактора в  $i$ -ому досліді;  $N$  – число дослідів;  $j=1,2, \dots,k$ ; 2) умова нормування: сума квадратів елементів кожного стовпця дорівнює числу дослідів:  $\sum_{i=1}^N x_{ij}^2 = N$ . Це наслідок того, що рівні факторів в матриці задаються  $+1$  та  $-1$ .

Рівність нулю скалярних добутоків усіх вектор-стовпців називається властивістю ортогональності матриці планування:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij}x_{ji} = 0; u \neq j; u, j = 0; j = 0,1, \dots, k.$$

Ця властивість сприяє різкому зменшенню труднощів, пов'язаних із розрахунком коефіцієнтів рівняння регресії. Властивість плану, при якому точність передбачення значень функції відгуку залежить тільки від відстані до центру плану, називається ротатбельністю [1, 2].

Повний факторний план експерименту дозволяє кількісно оцінювати ефекти взаємодії факторів. Для цього треба, користуючись правилом перемножування стовпців матриці плану, отримати стовець добутоків рівнів двох факторів, з яким можна працювати також, як з вектор-стовпцем рівнів будь-якого фактора. При додаванні стовпців, що відображають ефекти взаємодії факторів, всі розглянуті вище властивості плану зберігаються.

Матриця повного факторного плану  $2^2$ , що враховує ефект взаємодії факторів, представлена в табл. 3.7.

**Таблиця 3.7 – Матриця планування повного факторного плану  $2^2$**

| Номер досліді | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1 x_2$ | $y$   |
|---------------|-------|-------|-------|-----------|-------|
| 1             | +1    | +1    | +1    | +1        | $y_1$ |
| 2             | +1    | -1    | +1    | -1        | $y_2$ |
| 3             | +1    | -1    | -1    | +1        | $y_3$ |
| 4             | +1    | +1    | -1    | -1        | $y_4$ |

Тепер модель виглядає наступним чином:

$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$ , а коефіцієнт  $b_{12}$  обчислюється звичайним шляхом  $b_{12} = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (-1)y_4}{4}$ .

Вектор-стовпці  $x_1$  та  $x_2$  визначають умови експерименту, а  $x_0$  та  $x_1x_2$  служать тільки для розрахунку коефіцієнтів  $b_0$  і  $b_{12}$ .

Ефект взаємодії двох факторів називається ефектом першого порядку, трьох факторів – другого порядку і т.д. Часто застосовуються терміни: парні ефекти взаємодії факторів ( $x_1x_2, x_2x_3, \dots$ ), потрійні ( $x_1x_2x_3, x_2x_3x_4, \dots$ ) і т.д. Максимальний порядок ефекту взаємодії факторів при повному факторному плані на одиницю менше числа факторів, а сума числа всіх можливих ефектів, включаючи  $b_0$ , лінійні ефекти та взаємодії всіх порядків, дорівнює числу дослідів.

Щоб знайти число можливих взаємодій деякого порядку, можна скористатися звичайною формулою числа сполучень [4]:

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \quad (3.4)$$

де  $k$  – число факторів;  $m$  – число елементів взаємодії.

Тоді для плану  $2^4$  число парних взаємодій:  $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ .

**Приклад 3.** Встановити вплив заднього кута  $\alpha$ , переднього кута  $\gamma$ , головного кута в плані  $\varphi$ , допоміжного кута в плані  $\varphi_1$ , радіусу при вершині  $r$  на стійкість  $T$  токарного різця.

Вибираються основні рівні факторів:  $\alpha=6-10^\circ$ ;  $\gamma=2-9^\circ$ ;  $\varphi=39-45^\circ$ ;  $\varphi_1=20-25^\circ$ ;  $r=0,2-0,8$ . Основний рівень  $i$ -го фактора та інтервал варіювання на рівні розраховуються за формулами:  $x_{0i}=(x_{i\max}+x_{i\min})/2$ ;  $\varepsilon_i=(x_{i\max}-x_{i\min})/2$  (табл. 3.8).

**Таблиця 3.8 – Рівні та інтервали варіювання факторів**

| Фактори     | Кодовані значення | Інтервал варіювання | Рівні факторів |              |            |
|-------------|-------------------|---------------------|----------------|--------------|------------|
|             |                   |                     | +1             | 0            | -1         |
| $\gamma$    | $X_1$             | $3,5^\circ$         | $-2^\circ$     | $-5,5^\circ$ | $-9^\circ$ |
| $\alpha$    | $X_2$             | $2^\circ$           | $10^\circ$     | $8^\circ$    | $6^\circ$  |
| $\varphi_1$ | $X_3$             | $2,5^\circ$         | $25^\circ$     | $22,5^\circ$ | $20^\circ$ |
| $\varphi$   | $X_4$             | $3^\circ$           | $45^\circ$     | $42^\circ$   | $39^\circ$ |
| $r$         | $X_5$             | 0,3                 | 0,8            | 0,5          | 0,2        |

На першому етапі дослідження в якості плану експерименту приймаємо  $\frac{1}{4}$  репліку ( $2^{5-2}$ ) від повного факторного експерименту  $2^5$ . Репліка задана генеруючим співвідношенням  $X_4=X_1X_2$ ;  $X_5=X_1X_2X_3$ . Матриця планування та результатів дослідів (табл. 3.9) проведення представлена в табл. 3.10.

**Таблиця 3.9 – Вихідні дані**

| Значення стійкості різців, отриманих в результаті експерименту, $T$ (хв.) |      |      |      |      |      |      |      |
|---|------|------|------|------|------|------|------|
| 29,5  | 30,1 | 28,8 | 27,0 | 30,0 | 28,5 | 29,0 | 31,2 |
| Значення параметру оптимізації $y_u$ в $u$ -ому досліді                   |      |      |      |      |      |      |      |
| 24,1  |      | 23,6 |      | 23,9 |      | 24,0 |      |

**Таблиця 3.10 – Матриця планування експерименту**

| № | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $Y(T)$ , хв. |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|
| 1 | +1    | +1    | +1    | +1    | +1    | +1    | 29,5         |
| 2 | +1    | -1    | +1    | +1    | -1    | -1    | 30,1         |
| 3 | +1    | +1    | -1    | +1    | -1    | -1    | 28,8         |
| 4 | +1    | -1    | -1    | -1    | +1    | -1    | 27,0         |
| 5 | +1    | +1    | +1    | -1    | +1    | -1    | 30,0         |
| 6 | +1    | -1    | +1    | -1    | -1    | +1    | 28,5         |
| 7 | +1    | +1    | -1    | +1    | -1    | -1    | 29,0         |
| 8 | +1    | -1    | -1    | +1    | +1    | +1    | 31,2         |

Для опису використовуємо лінійну модель виду:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5; b_0 = x_5x_0; b_1 = x_5x_1. \quad (3.5)$$

$$\text{Значення коефіцієнта } b_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij} \cdot y_i}{N}.$$



$$b_0 = \frac{29,5 + 30,1 + 28,8 + 27,0 + 30,0 + 28,5 + 29,0 + 31,2}{8} = 29,263;$$

$$b_1 = \frac{29,5 - 30,1 + 28,8 - 27,0 + 30,0 - 28,5 + 29,0 - 31,2}{8} = 0,063;$$

$$b_2 = \frac{29,5 + 30,1 - 28,8 - 27,0 + 30,0 + 28,5 - 29,0 - 31,2}{8} = 0,263;$$

$$b_3 = \frac{29,5 + 30,1 + 28,8 - 27,0 - 30,0 - 28,5 + 29,0 + 31,2}{8} = 7,888;$$

$$b_4 = \frac{29,5 - 30,1 - 28,8 + 27,0 + 30,0 - 28,5 - 29,0 + 31,2}{8} = 0,163;$$

$$b_5 = \frac{29,5 - 30,1 - 28,8 - 27,0 - 30,0 + 28,5 - 29,0 + 31,2}{8} = -6,963;$$

$$y = 29,263 + 0,063x_1 + 0,263x_2 + 7,888x_3 + 0,163x_4 - 6,963x_5.$$

Рис. 3.5 – Фрагмент документа Mathcad з обчисленнями коефіцієнтів

Дисперсію  $S_y^2$  параметра оптимізації обчислюємо за результатами чотирьох дослідів в центрі плану, тобто при  $x_1=x_2=x_3=x_4=0$ . Розрахунок дисперсії  $S_y^2$  приведений у табл. 3.11.

Таблиця 3.11 - Розрахунок дисперсії  $S_y^2$

| №        | $y_i$ | $\bar{y}$ | $(y - \bar{y})$ | $(y - \bar{y})^2$ | $S_y^2$   |
|----------|-------|-----------|-----------------|-------------------|---|
| 1        | 24,1  | 23,9      | 0,2             | 0,04              | $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n_0 - 1} = 0,0467$ |
| 2        | 23,6  |           | -0,3            | 0,09              |   |
| 3        | 23,9  |           | 0               | 0,0               |   |
| 4        | 24,0  |           | 0,1             | 0,01              |   |
| $\Sigma$ | 95,6  |           |                 | 0,14              |   |

де  $n_0$  – число дослідів в центрі плану;  $y_i$  – значення параметра оптимізації в  $i$ -ому досліді в центрі плану.

$$S_{bi}^2 = S_y^2 / N = 0,0467 / 8 = 0,0058.$$

Довірчий інтервал  $\Delta b_i = \pm i S_{bi}$ ,  $b_i \geq \Delta b$  – умова виконується для всіх  $b_i$ .

$$y = 29,263 + 0,063x_1 + 0,263x_2 + 7,888x_3 + 0,163x_4 - 6,963x_5. \quad (3.6)$$

Для перевірки гіпотези адекватності моделі, представленої рівнянням (3.6), знаходимо дисперсію адекватності:

$$S_{ay}^2 = \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \right] / f, \quad (3.7)$$

де  $y$  – значення параметра оптимізації в  $i$ -ому досліді, обчислене по рівнянню регресії;  $f=N-(k-1)$  – число ступенів свободи;  $k$  – число факторів.

Розрахунок дисперсії  $S_y^2$  приведений у табл. 3.12.

**Таблиця 3.12 – Розрахунок дисперсії  $S_y^2$**

| №        | $y_i$ | $\bar{y}$ | $(y - \bar{y})$ | $(y - \bar{y})^2$ | $S_y^2$  |
|----------|-------|-----------|-----------------|-------------------|--|
| 1        | 29,5  | 30,7      | -1,2            | 1,44              | $S_{ay}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{f} = 844,61/2 = 422,305$ |
| 2        | 30,1  | 44,2      | -14,1           | 198,81            |  |
| 3        | 28,8  | 43,8      | -15             | 225               |  |
| 4        | 27,0  | 28,2      | -1,2            | 1,44              |  |
| 5        | 30,0  | 28,8      | 1,2             | 1,44              |  |
| 6        | 28,5  | 14,5      | 14              | 196               |  |
| 7        | 29,0  | 43,8      | -14,8           | 2129,04           |  |
| 8        | 31,2  | 30,0      | 1,2             | 1,44              |  |
| $\Sigma$ |       |           |                 | 844,61            |  |

Перевірка гіпотези адекватності проводиться за  $F$ -критерієм Фішера. Для цього знайдемо  $F_p = S_{ay}^2 / S_y^2 = 422,305 / 0,0467 = 9042,9$ .

Якщо  $F_p < F_T$  – модель адекватна. У нашому випадку  $9042,9 > 9,55$ , умова не виконується і модель неадекватна.

### 3.4 Дробний факторний експеримент

Зі збільшенням числа факторів різко зростає кількість дослідів повного факторного плану, а також число ступенів свободи  $f=N-q$  ( $N$  – число дослідів;  $q$  – число невідомих коефіцієнтів регресії).

Для скорочення числа експериментів використовується метод дробних реплік [3].

Метод полягає в тому, що для знаходження математичного опису процесу використовується певна частина повного факторного плану (1/2, 1/4 і т.д.), звана дробним факторним планом (дробовою реплікою повного факторного плану). Розрахунок коефіцієнтів регресії, перевірка їх значущості та адекватності математичної моделі

у цьому випадку виконуються так само, як і при повному факторному плані.

Надлишкова ступінь свободи використовується для мінімізації числа дослідів. Для цього вектор-стовпцем взаємодії, яким можна знехтувати, присвоюється ім'я нового фактора  $x_1x_2=x_3$ . Тоді план повного двофакторного експерименту використовується для проведення дробного трьохфакторного експерименту. При цьому в два рази скорочується число дослідів в порівнянні з повним трьохфакторним експериментом. Можна також провести заміну  $x_1x_2=x_3$ . При об'єднанні подібних планів маємо повний трьохфакторний експеримент. Кожен з цих двох планів називається дробною реплікою від повного факторного експерименту.

Наприклад, прийнявши для фактора  $x_4$  вектор-стовпець  $x_1x_2x_3$  отримаємо план  $2^3$  (табл. 3.13). Цей план містить половину дослідів повного факторного плану, тобто є напіврепліки плану  $2^4$ .

**Таблиця 3.13 – Матриця планування повного факторного плану  $2^3$**

| Номер дослідів | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4=x_1 x_2 x_3$ |
|----------------|-------|-------|-------|-------------------|
| 1              | +1    | +1    | +1    | +1                |
| 2              | +1    | -1    | +1    | -1                |
| 3              | -1    | +1    | +1    | -1                |
| 4              | -1    | -1    | +1    | +1                |
| 5              | +1    | +1    | -1    | -1                |
| 6              | +1    | -1    | -1    | +1                |
| 7              | -1    | +1    | -1    | +1                |
| 8              | -1    | -1    | -1    | -1                |

Дробні репліки записуються наступним чином:  $N=2^{k-l}$ ,  $k$  – загальне число факторів,  $l$  – число взаємодій.

### **3.5 Планування експерименту з метою опису досліджуваного об'єкта**

Перед проведенням дослідів, виходячи з апіорної інформації про процес, можливостей апаратури та цілей експерименту, встановлюються граничні рівні кожного фактора ( $z_{1j}$  та  $z_{2j}$ ), координати центру плану (або основного рівня факторів) та інтервал варіювання рівнів факторів. Основний рівень  $j$ -го фактора та інтервал варіювання його рівня розраховують за формулами [4]:

$$z_{0j} = \frac{z_{2j} + z_{1j}}{2}; J_j = \Delta_j = \frac{z_{2j} - z_{1j}}{2}. \quad (3.8)$$

Кодування змінних виконують за формулою:

$$x_{ij} = \frac{2z_{ij} - z_{1j} - z_{2j}}{z_{1j} - z_{2j}}. \quad (3.9)$$

Всі відомості, необхідні для постановки експерименту по статистичному плану, заносять в таблицю (табл. 3.14).

**Таблиця 3.14 – Відомості до постановки експерименту**

|                         |            |            |            |     |            |
|-------------------------|------------|------------|------------|-----|------------|
| Характеристики факторів | $z_1$      | $z_2$      | $z_3$      | ... | $z_k$      |
| Основний рівень         | $z_{01}$   | $z_{02}$   | $z_{03}$   | ... | $z_{0k}$   |
| Інтервал варіювання     | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | ... | $\Delta_k$ |
| Верхній рівень (+1)     | $z_{21}$   | $z_{22}$   | $z_{23}$   | ... | $z_{2k}$   |
| Нижній рівень (-1)      | $z_{11}$   | $z_{12}$   | $z_{13}$   | ... | $z_{1k}$   |

Потім складають план експерименту, в який вносять також результати  $n$  ( $n=2...5$ ) паралельних дослідів (табл. 3.15).

**Таблиця 3.15 – Результати експерименту**

| №   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_k$ | Паралельні досліді |          |     |          |
|-----|-------|-------|-------|-----|-------|--------------------|----------|-----|----------|
|     |       |       |       |     |       | $y_1$              | $y_2$    | ... | $y_n$    |
| 1   | +1    | +1    | +1    | ... | +1    | $y_{11}$           | $y_{12}$ | ... | $y_{1n}$ |
| 2   | +1    | -1    | +1    | ... | +1    | $y_{21}$           | $y_{22}$ | ... | $y_{2n}$ |
| ... | ...   | ...   | ...   | ... | ...   | ...                | ...      | ... | ...      |
| m   | -1    | -1    | -1    | ... | -1    | $y_{m1}$           | $y_{m2}$ | ... | $y_{mn}$ |

Зазвичай виявляється достатнім проведення двох паралельних дослідів, так як для перевірки адекватності рівняння регресії використовують середню дисперсію відтворюваності.

При проведенні досліджень можливі три варіанти дублювання дослідів: 1) рівномірне дублювання дослідів, коли у всіх рядках матриці плану число паралельних дослідів однакове; 2) нерівномірне дублювання, при якому число паралельних дослідів в різних рядках матриці плану не однакове; 3) дублювання дослідів відсутнє.

Математична обробка результатів спостережень залежить від характеру дублювання дослідів. З урахуванням виду дублювання

дослідів воно проводиться за наступною схемою [4]: 1) для кожного рядка матриці плану обчислюють середнє арифметичне значення параметра оптимізації та його дисперсію; 2) перевіряють однорідність дисперсій результатів дослідів (при рівномірному дублюванні дослідів для цього використовують критерій Кохрена, при нерівномірному дублюванні – критерій Бартлєта, при відсутності дублювання дослідів перші два етапи відсутні); 3) якщо дисперсії результатів дослідів однорідні, обчислюють дисперсію відтворюваності експерименту; 4) обчислюють коефіцієнти рівняння регресії, їх дисперсії та оцінюють їх значущість; 5) перевіряють гіпотезу про адекватність моделі.

Якщо лінійна модель адекватна, переходять до пошуку рівнів факторів, що забезпечують екстремальне значення (мінімум або максимум в залежності від постановки задачі) функції відгуку, тобто переходять до вирішення завдання оптимізації.

## **4. ОПТИМІЗАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ**

Задачі оптимізації дуже часто вирішують пошуковими методами, що відрізняються великою різноманітністю. Разом із різними модифікаціями їх нараховують кілька десятків. До основних методів пошуку можна віднести наступні: метод градієнта, метод найшвидшого спуску, його модифікацію – метод крутого сходження (градієнтні методи); метод Гауса-Зейделя, метод симплексів, метод випадкового пошуку (без градієнтні методи).

### ***4.1. Метод Гауса-Зейделя***

При оптимізації методом Гауса-Зейделя оптимум досліджуваного процесу шукають почерговим варіюванням кожної вхідної змінної (фактора) до досягнення власного оптимуму. Спочатку досягається оптимум по напрямку однієї з координатних осей при фіксованих значеннях факторів по інших координатних осях. Потім, зафіксувавши знайдене значення фактора, переходять до варіювання іншого фактора, де знову досягається приватне значення оптимуму і т.д. На рис. 4.1 зображені лінії рівного виходу цільової функції при двох факторах і загальні представлення про дію методу Гауса-Зейделя.

Цей найбільш простий метод оптимізації широко використовується в практиці досліджень. Найчастіше, однак, обмежуються однократним варіюванням по кожній з координатних осей, що зв'язано з основним недоліком методу – тривалістю просування в область оптимуму. Тому зазначений алгоритм рідко

доводить до області оптимуму.

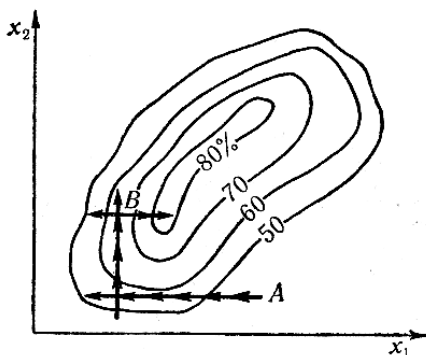


Рис. 4.1 – Графічна інтерпретація пошуку оптимуму методом Гауса-Зейделя

#### 4.2. Метод випадкового пошуку

Основна ідея методу полягає у випадковому виборі напрямку руху на кожному наступному кроці (рис. 4.2). Є багато різновидів методу випадкового пошуку, але усі вони об'єднані застосуванням випадкового вектора. Для формування випадкового вектора використовуються випадкові числа. Метод широко використовується при оптимізації процесів, однак дає гарні результати при великому числі факторів, а також корисний у сполученні з іншими методами.

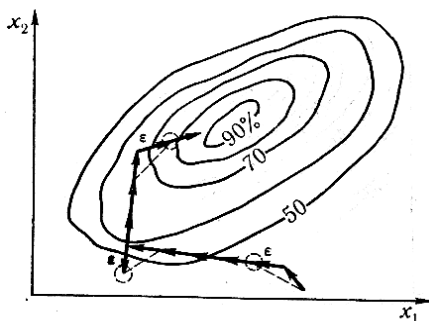


Рис. 4.2 – Графічна інтерпретація пошуку оптимізації методом випадкового пошуку

#### 4.3. Метод симплексів

Основною особливістю методу симплексів є об'єднання процесу вивчення досліджуваного об'єкта та процесу пошуку оптимуму, що досягається плануванням експерименту у вигляді симплекса.  $n$ -мірним симплексом визначається фігура, утворена безліччю  $n+1$  точок, названих вершинами симплекса, що не належать одночасно жодному  $(n-1)$ -мірному підпростору. Разом з вершинами  $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$  симплекс містить усі точки  $Z$  виду:

$$Z = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i V_i \quad (4.1)$$

де  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ .

Геометрично симплекс являє собою найпростіший випуклий багатогранник цього числа вимірів  $n$ . Для  $n=3$  це тетраедр, для  $n=2$  – трикутник. Симплекс може бути правильним. Тоді це рівносторонній трикутник, правильний тетраедр і т.д.

Симплекс має велику перевагу: у ньому можна відкинути одну вершину і побудувати новий симплекс, використовуючи нову вершину, побудовану симетрично відкинутої. Послідовним відкиданням вершин можна переміщати симплекс у факторному просторі. Доведено, що якщо щоразу відкидати вершину з найгіршим значенням вихідної перемінної, то центр симплекса буде переміщуватися до оптимуму (рис. 4.3).

Метод симплексів для пошуку оптимуму широко застосовують при: оптимізації процесів як на етапі лабораторних досліджень, так і в промислових дослідженнях. Основна його перевага полягає в скороченні числа експериментів при високій ефективності пошуку оптимуму. Метод використовується для пошуку оптимуму на реальних об'єктах і на математичній моделі.

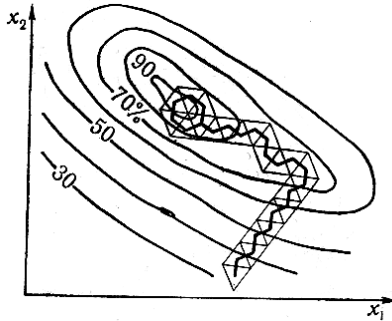


Рис. 4.3 – Графічна інтерпретація методу симплексного пошуку

#### 4.4. Метод градієнта

При оптимізації методом градієнта оптимум досліджуваного об'єкта шукають у напрямку найбільш швидкого зростання (спадання) вихідної змінної, тобто в напрямку градієнта. Але перш ніж зробити крок у напрямку градієнта, необхідно його розрахувати. Градієнт можна визначити або по наявній моделі

$$\text{grad } y(x) = \frac{\partial y}{\partial x_1} i + \frac{\partial y}{\partial x_2} j + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} k, \quad (4.2)$$

де  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$  – часткова похідна по  $i$ -му фактору;  $i, j, k$  – одиничні вектори в напрямку координатних осей факторного простору, або за результатами  $n$  пробних рухів у напрямку координатних осей (рис. 4.4).

Якщо математична модель статистичного процесу має вид лінійного полінома, коефіцієнти регресії  $b_i$  якого є частковими похідними розкладання функції  $y=f(X)$  в ряд Тейлора по ступенях  $x_i$  то оптимум шукають у напрямку градієнта з деяким кроком  $h_i$ :

$$\text{grad } y(x) = b_1 h_1 + b_2 h_2 + \dots + b_n h_n. \quad (4.3)$$

Напрямок коректують після кожного кроку. Метод градієнта разом з його численними модифікаціями є розповсюдженим і ефективним методом пошуку оптимуму досліджуваних об'єктів. Розглянемо одну з модифікацій методу градієнт-метод крутого сходження.



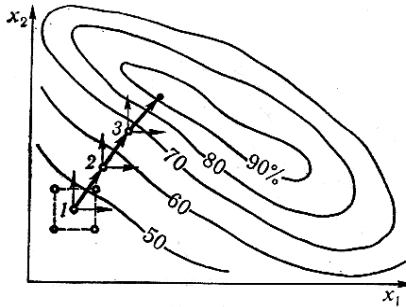


Рис. 4.4 – Графічна інтерпретація методу градієнта

#### 4.5. Метод крутого сходження

Метод крутого сходження, чи інакше метод Бокса-Уілсона, поєднує в собі переваги трьох методів – методу Гауса-Зейделя, методу градієнта та методу повно-факторного експерименту, як засобу одержання лінійної математичної моделі. Задача методу крутого сходження полягає в тому, щоб кроковий рух здійснювати в напрямку найшвидшого зростання (чи спадання) вихідних змінних, тобто по  $grad y(x)$ . На відміну від методу градієнта напрямок коректується не після кожного наступного кроку, а при досягненні в деякій точці на даному напрямку часткового екстремуму цільової функції (рис. 4.5), як це робиться в методі Гауса-Зейделя. У точці часткового екстремуму ставиться новий факторний експеримент, визначається математична модель і знову здійснюється круте сходження. У процесі руху до оптимуму зазначеним методом регулярно проводиться статистичний аналіз проміжних результатів пошуку. Пошук припиняється, коли квадратичні ефекти в рівнянні регресії стають значимими. Це означає, що досягнуто область оптимуму.

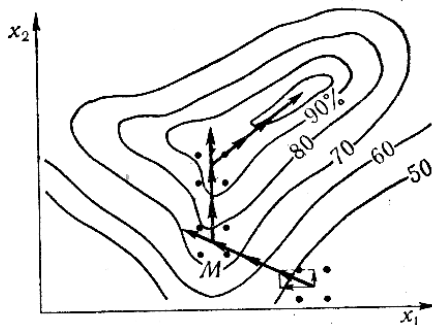


Рис. 4.5 – Графічна інтерпретація методу крутого сходження

## 5. ФОРМИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

### 5.1 Методи графічного зображення результатів експерименту

Незалежно від характеру експерименту основним завданням є вибір і перетворення системи координат так, щоб повний набір даних давав по можливості пряму лінію. Якщо отримані дані не утворюють пряму на лінійному графічному папері, то можна спробувати побудувати графік в логарифмічних координатах (або наносити логарифми значень  $X$  і  $Y$  на лінійний графічний папір) [5].

У логарифмічних координатах графік простої функції  $Y=kX^a$  має вигляд прямої. Переходячи до логарифмів, отримуємо  $\log Y = \log k + a \log X$ .

Експериментальні дані найбільш часто наносяться на логарифмічну координатну сітку.

Є також третій тип графічного паперу – напівлогарифмічний, коли одна шкала є логарифмічною, а інша – лінійною. У цьому випадку виходить пряма, якщо дані підкоряються закону  $Y=k10^{aX}$ . Після перетворення цієї функції маємо  $\log Y = \log k + aX$ .

Щоб вийшла пряма, шкала по осі  $Y$  повинна бути логарифмічною, а по осі  $X$  – лінійною. У випадку прямої полегшується застосування екстраполяції для перевірки відповідності даних і спрощується обчислення різних статистичних показників (наприклад, середнє квадратичне відхилення).

Зустрічається папір спеціального виду (наприклад, із трьома осями координат, гіперболічний), однак фактично в його застосуванні немає необхідності, тому що гіперболічну функцію  $Y=X/(a+bX)$  можна

представити у вигляді прямої, побудувавши в лінійних координатах залежність  $X/Y$  від  $X$  або  $1/Y$  від  $1/X$ .

Один із загальних принципів, якого необхідно дотримуватися при побудові графіків, полягає в тому, що мінімальний поділ шкали графічного паперу має відповідати приблизно вірогідній помилці вимірюваної величини. Якщо ж ймовірна помилка дорівнює, наприклад, десяти малим розподілам, то може бути настільки великий розкид даних, що не вдасться вловити основний характер кривої або встановити закономірність її зміни. З іншого боку, коли ймовірна помилка дорівнює одній десятій найменшого розподілу, всі випадкові відхилення згладяться і буде неможливо отримати який-небудь показник точності.

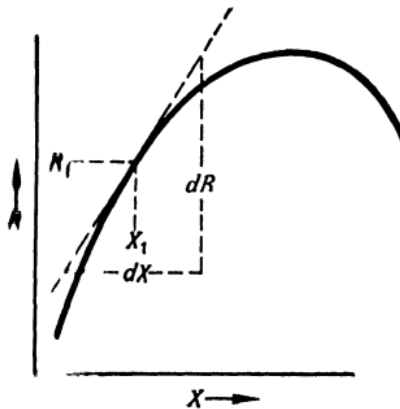


Рис. 5.1 – До визначення помилки результату

У багатьох випадках в інженерній практиці покази приладів обробляються за допомогою функціональних співвідношень, представлених у вигляді графіків, шкал, діаграм, номограм або таблиць. При використанні таких графічних або табличних функцій застосовують метод кінцевих розмірностей. Наприклад, нехай використовується прилад, відлік  $X$  якого, згідно з оцінкою, має невизначеність  $\omega_x$  і для отримання результату  $R$  необхідно скористатися графіком залежності  $R$  від  $X$ . Похідну  $dR/dX$  можна отримати графічним шляхом, провівши дотичну в точці  $(R_1, X_1)$  і вимірявши тангенс кута нахилу (рис. 5.1).

При виявленні закону розподілу необхідно здійснювати перевірку близькості експериментального розподілу до теоретичного.

Для виявлення закону розподілу заповнюється таблиця експериментальних даних (табл. 5.1).

**Таблиця 5.1 – Експериментальні дані**

| $x_i$ | $n_i$ | $H_i$ | $H_i/\sum n_i$ | $1-H_i/\sum n_i$ |
|-------|-------|-------|----------------|------------------|
| 1     | 2     | 3     | 4              | 5                |
|       |       |       |                |                  |

У стовпці 1 записуються значення членів варіаційного ряду досліджуваної величини, в стовпці 2 – частоти  $n_i$ , що є спостережуваними числами появи досліджуваної величини. У стовпці 3 даються накопичені частоти  $H_i$ , які є сумами частот з стовпця 2, починаючи з першого числа і закінчуючи частотою відповідного числа ряду. У стовпці 4 записуються накопичені частоти, в стовпці 5 – величини  $1-H_i/\sum n_i$ .

При графічному відображенні експериментальних даних необхідно ці стовпців 1 та 5 нанести на кальку з відповідною координатної сіткою. Далі проводиться лінійна інтерполяція шляхом проведення прямої лінії через нанесені раніше на кальці позначки з таким розрахунком, щоб відхилення відміток від прямої мали б найменші значення і розташовувалися по обидві сторони.

Найбільше відхилення  $D$  знімається з кальки, де знаходиться шляхом зіставлення між собою відхилень експериментальних відміток від інтерполяційної прямої. При визначенні  $D$  необхідно враховувати нерівномірність шкали  $1-H_i/\sum n_i$ , завдяки якій лінійні відрізки відхилень на різних ділянках координатної сітки мають різний масштаб.

Потім розраховується критерій згоди Колмогорова за формулою  $D\sqrt{k}$ , де  $k$  – загальна кількість експериментальних точок. Якщо  $D\sqrt{k} \leq 1$ , то вважається встановленим, що експериментальне розподіл узгоджується із законом розподілу, з яким він порівнювався. Якщо  $D\sqrt{k} > 1$ , то слід продовжувати порівняння з іншим видом теоретичного закону.

Неможливість проведення прямої лінії через експериментальні позначки свідчить про невідповідність експериментальних даних закону, що перевіряється. У цьому випадку слід перейти до перевірки експериментального розподілу на наступний вид закону розподілу.

## 5.2 Методи підбору емпіричних формул

На основі експериментальних даних підбираються алгебраїчні вирази функцій  $y=f(x)$ , які називаються емпіричними формулами.

Процес підбору емпіричної формули складається з двох етапів: 1) з'ясування загального вигляду формули за характером залежності експериментальних даних; 2) визначення чисельних значень параметрів формули.

Лінеаризацію експериментальної залежності можна здійснити за допомогою методу вирівнювання. Вирівнюванням називається перетворення емпіричної формули  $y=f(x, a, b)$  до вигляду  $Y=a_1X+b_1$ , шляхом відповідної заміни змінних, при цьому знаходять параметри  $a_1$  та  $b_1$  перетвореної формули, а потім по них перераховують параметри  $a$  та  $b$ .

Припустимо, що в прямокутній системі координат побудована деяка експериментальна лінійна функція. Коефіцієнти  $a$  і  $b$  рівняння прямої отримують наступним чином. Визначення коефіцієнта  $a$  зрозуміло з рисунку 5.2. Для розрахунку  $b$  необхідно точки  $y_i$  і  $x_i$  приймати на крайніх ділянках прямої. Для визначення параметрів прямої застосовують також інший графічний метод [6]. У рівняння  $y=a+bx$  підставляють координати двох крайніх точок, взятих із графіка, при цьому отримують систему двох рівнянь, із яких обчислюють коефіцієнти  $a$  і  $b$ .

Після встановлення параметрів  $A$  та  $B$  отримують емпіричну формулу типу  $y=a+bx$ .

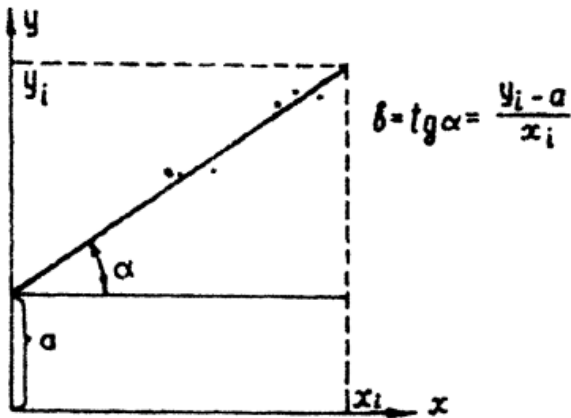


Рис. 5.2 – Графічне визначення параметрів «a» та «b»



З аналізу кривої робимо висновок про можливість застосування степеневі залежності  $y=ax^a$ .

Проведемо лінеаризацію, використовуючи формули перетворення:

$$y=kx+b; X=\ln x; Y=\ln y; b=\ln a; k=a.$$

Складемо 8 рівнянь:

$$\begin{cases} \ln 10,465 = k \ln 0,5 + b; \\ \ln 7,961 = k \ln 0,6 + b; \\ \ln 6,318 = k \ln 0,7 + b; \\ \ln 4,333 = k \ln 0,9 + b; \\ \ln 2,815 = k \ln 1,2 + b; \\ \ln 2,234 = k \ln 1,4 + b; \\ \ln 1,268 = k \ln 2 + b; \\ \ln 0,712 = k \ln 3 + b \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \ln 29,077 = k \ln 2,7 + b; \\ \ln 7,029 = k \ln 7,6 + b; \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} 3,37 = 0,99k + b; \\ 1,95 = 2,03k + b. \end{cases}$$

Вирішивши цю систему рівнянь в **Mathcad**:

Given

$$0.99 \cdot k + b - 3.37 = 0$$

$$2.03 \cdot k + b - 1.95 = 0$$

$$\text{Find}(k, b) \rightarrow \begin{pmatrix} -1.3653846153846153846 \\ 4.7217307692307692308 \end{pmatrix}, \text{ имеем } k = -1.36, b = 4.72.$$

Порівняємо виміряні значення із розрахованими за формулою  $y=4,72x^{-1,36}$  (рис. 5.4).

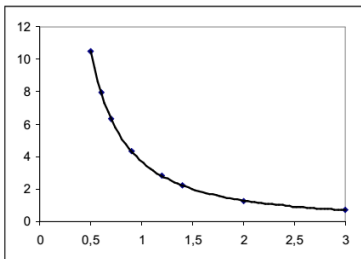


Рис. 5.3 – Експериментальна залежність

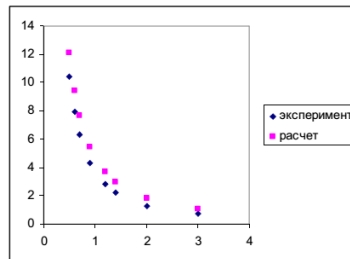


Рис. 5.4 – Зіставлення експериментальної залежності з розрахунковою, отриманою за формулою  $y=4,72x^{-1,36}$

Таким чином, отримана формула досить точно описує експериментальні дані.

Після виконання обчислень і отримання емпіричної формули необхідно здійснити перевірку правильності обчислень.

При цьому використовуються два способи перевірки.

За першим способом для перевірки правильності обчислень використовується вираз  $\Sigma(x+y)^2 = \Sigma x^2 + 2\Sigma xy + \Sigma y^2$ . Ця умова має виконуватися не тільки для сум, а й у кожному рядку розрахункової табл. 5.3

**Таблиця 5.3 – Розрахункова таблиця**

| №                | $x$       | $y$       | $x^2$ | $xy$ | $y^2$ | $x + y$ | $(x + y)^2$ |
|------------------|-----------|-----------|-------|------|-------|---------|-------------|
|                  |           |           |       |      |       |         |             |
| $\Sigma$         |           |           |       |      |       |         |             |
| Середнє значення | $\bar{x}$ | $\bar{y}$ |       |      |       |         |             |

За другим способом використовується умова  $y = a + \beta x$ . Підставляючи в це співвідношення середні значення  $y$  та  $x$  із останнього рядка таблиці і один з коефіцієнтів, визначається інший коефіцієнт і порівнюється з розрахунковим. Ця перевірка повна і точна, оскільки вона перевіряє не тільки обчислення сум, але і обчислення коефіцієнтів.

На практиці використовуються обидві перевірки, щоб у разі помилки в таблиці, не обчислювати марно коефіцієнти. Після обчислень коефіцієнтів наносять вихідні дані та отримане рівняння на графік.

Визначивши вид емпіричної формули та її параметри, обчислюють середнє квадратичне відхилення, яке характеризує точність знайденої емпіричної формули і порівнюють його з

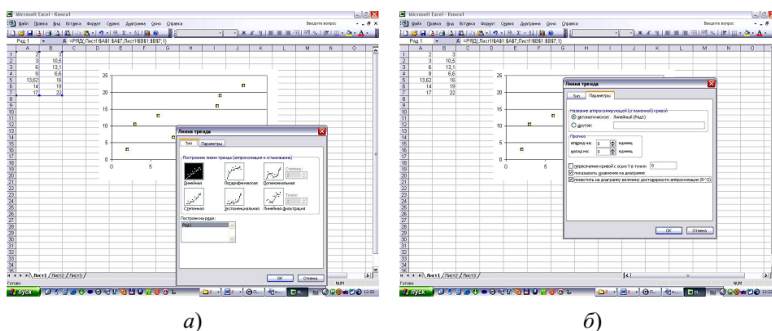
похибками експерименту  $\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - y'_i)^2}{N - 1}}$ , де  $y_i$  – експериментальні значення;  $y'_i$  – розрахункові значення.

Підбір емпіричних формул можна здійснити також за допомогою табличного процесора **Microsoft Excel**. Для цього необхідно побудувати точковий графік за експериментальними даними.



Клацанням лівої клавіші виділити всі точки і натиснути праву клавішу миші та вибрати команду «Додати лінію тренда». При цьому в робочому просторі аркуша з'явиться діалогове вікно «Лінія тренда» (рис. 5.5, а).

У цьому діалоговому вікні можна вибрати вид функції, за допомогою якої передбачається здійснити апроксимацію експериментальних даних. Потім, вибравши вкладку «Параметри», у вікні, ставимо прапорці на «показувати рівняння на діаграмі» та «помістити на діаграму величину достовірності апроксимації ( $R^2$ )» (рис. 5.5, б). Натиснувши «ОК», отримаємо в просторі робочого листа побудований графік з апроксимованою формулою і ступенем точності апроксимації. Якщо з яких-небудь причин необхідно змінити вид апроксимаційної залежності, то це можна зробити подвійним клацанням лівою клавішею миші по цій залежності, при цьому відкривається вікно «Формат лінії тренду», де можна змінити параметри апроксимації.



**Рис. 5.5 – Використання табличного процесора Microsoft Excel для апроксимації експериментальних даних**

При графічному методі обробки експериментальних даних у системі декартових або логарифмічних координат необхідно визначити, як найкращим чином провести криву або пряму по ряду експериментальних точок. У цьому випадку обробку результатів дослідів виробляють за методом найменших квадратів [6].

Якби експериментальні точки лежали строго на прямій лінії, то для кожної з них було б справедливо рівняння прямої лінії. Насправді розташування експериментальних точок характеризується деякими відхиленнями від проведеної через точки апроксимаційної прямої (рис. 5.6).

Суть методу найменших квадратів полягає в тому, щоб, знаючи положення точок на площині так провести лінію, щоб сума квадратів відхилень ординат цих точок від проведеної прямої була

$$\text{мінімальною } u = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = \min.$$

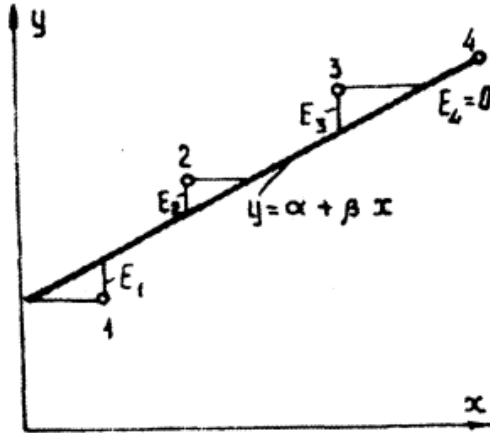


Рис. 5.6 – Розташування експериментальних і розрахункових точок

Для цього необхідно обчислити часткові похідні функції за коефіцієнтами, прирівняти їх нулю та продиференціювати вирази:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^N (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = 0; \frac{\partial u}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = 0. \quad (5.3)$$

Перетворивши отриману систему рівнянь і вирішивши цю систему через визначник, маємо:

$$\alpha = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}; \beta = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}. \quad (5.4)$$

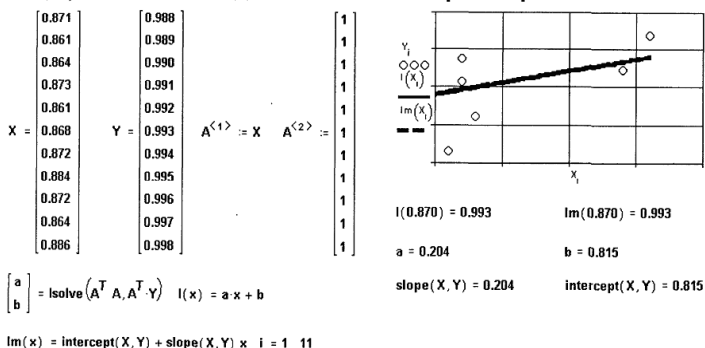
Обчислення коефіцієнтів зручно проводити в табличній формі.

**Приклад 5.** Для вивчення залежності октанового числа бензину від чистоти каталізатора (%) провели 11 вимірювань, наведених нижче.

**Таблиця 5.4 – Експериментальні дані**

|                      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Октанове число       | 98,8 | 98,9 | 99,0 | 99,1 | 99,2 | 99,3 | 99,4 | 99,5 | 99,6 | 99,7 | 99,8 |
| Чистота каталізатора | 87,1 | 86,6 | 86,4 | 87,3 | 86,1 | 86,6 | 87,2 | 88,4 | 87,2 | 86,4 | 88,6 |

Знайти коефіцієнти  $a, b$  лінійної залежності  $y=ax+b$  октанового числа від чистоти каталізатора. Обчислити значення октанового числа для чистоти каталізатора 87%.  $Y_j$  – експериментальні точки;  $I(X_i)$  – лінійна функція, обчислена за допомогою **Isolve**;  $Im(X_j)$  – лінійна функція, обчислена за допомогою **intersept** і **slope**.



**Рис. 5.7 – Фрагмент документа Mathcad з обчисленнями**

### 5.3 Апроксимація, інтерполяція і екстраполяція

Апроксимація – пошук функції, яка із заданим ступенем точності описує вихідні дані.

Інтерполяція – визначення найбільш правдоподібних проміжних значень в інтервалі між відомими значеннями (підбір гладкої кривої, що проходить через задані точки або максимально близько до них).

Екстраполяція – визначення найбільш правдоподібних подальших значень на підставі аналізу попередніх значень (прокування подальшої поведінки невідомої функції).

Застосовуються наступні функції **MathCAD** [8]:

– **regress** (VX, VY, k) – повертає вектор даних, використовуваний для пошуку інтерполюючого полінома порядку  $k$ . Поліном повинен описувати дані, що складаються з упорядкованих значень аргументу (VX) і відповідних значень невідомої функції (VY),

тобто графік полінома повинен проходити через всі точки, задані координатами  $(VX, VY)$ , або максимально близько до цих точок.

– **interp** ( $VS, VX, VY, x$ ) – повертає інтерполюване значення невідомої функції при значенні аргументу  $x$ .  $VS$  – вектор значень, який повернула функція **regress**.  $VX, VY$  – ті ж дані, що і для **regress**. Функції **interp** і **regress** використовуються в парі.

– **predict** ( $V, m, n$ ) – повертає вектор з  $n$  передбачених значень на підставі аналізу  $m$  попередніх значень з вектора  $V$ .

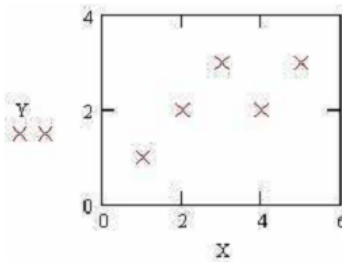
Передбачається, що значення функції у векторі  $V$  були отримані при значеннях аргументу, взятих послідовно, з однаковим кроком.

Використовується алгоритм лінійної предикції. Найбільш доцільно використовувати **predict** для передбачення значень за даними, в яких відзначені коливання.

Для інтерполяції система **Mathcad** використовує підхід, заснований на застосуванні методу найменших квадратів.

### *Приклади інтерполяції та екстраполяції:*

1. Нехай задано координати п'яти точок  $(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 2), (5; 3)$ , що представляють результати вимірювання значень деякої невідомої функції при різних значеннях  $x$ . Необхідно підібрати інтерполюючу функцію (гладку криву), що проходить через задані точки.



2. Ця функція  $y(i)=e^{-i/10}\sin(i)$ . Відомі значення цієї функції при  $i=0,1,\dots,10$ . Грунтуючись на десяти останніх значеннях, необхідно передбачити наступні десять значень.

Вирішення представлено на рисунку 5.7.

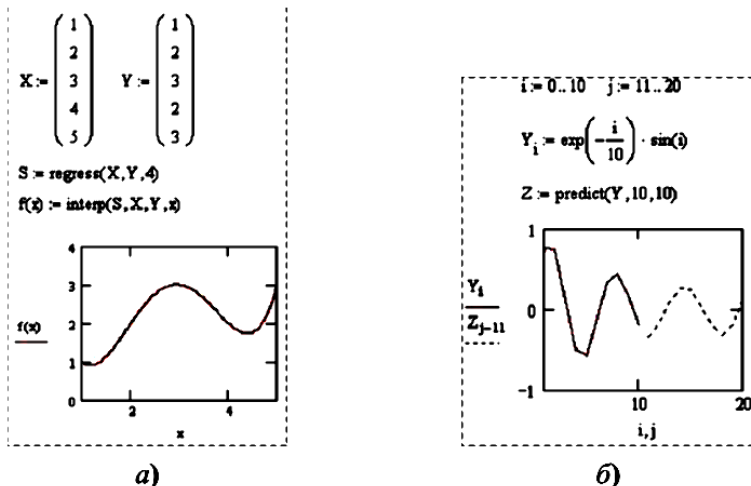


Рис. 5.7 – Вирішення в MathCAD першої (а) та другої (б) задачі

#### 5.4 Лінійна регресія

Регресією називають залежність  $y(x)$  умовного математичного очікування величини  $\eta(x)$  від змінної  $x$ , тобто  $y(x) = M(\eta/x)$ .

Завдання регресійного аналізу полягає у відновленні функціональної залежності  $y(x)$  за результатами вимірювань  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

Апроксимуємо невідому залежність  $y(x)$  заданою функцією  $f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_k)$ . Це означає, що результати вимірів можна представити у вигляді  $y_i = f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_k) + \xi_i$ , де  $a_0, a_1, \dots, a_k$  – невідомі параметри регресії, а  $\xi_i$  – випадкові величини, що характеризують похибки експерименту. Зазвичай передбачається, що  $\xi_i$  – незалежні нормально розподілені випадкові величини з  $M\xi_i = 0$  та однаковими дисперсіями  $D\xi_i = \sigma^2$ .

Параметри  $a_0, a_1, \dots, a_k$  слід вибирати таким чином, щоб відхилення значень запропонованої функції від результатів експерименту було мінімальним. Часто в якості запобіжного відхилення вибирають величину

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n (f(a_0, a_1, \dots, a_k) - y_i)^2, \text{ і, отже, параметри } a_0, a_1, \dots,$$

$a_k$  визначають методом найменших квадратів.

Розглянемо найпростіший випадок лінійної регресії [4]. Нехай

висунута гіпотеза про те, що функція  $f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)$  має вигляд  $f(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1x$ . Знайдемо оцінку параметрів  $a_0$  і  $a_1$  методом найменших квадратів. Для цього мінімізуємо функцію

$$\Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i - y_i)^2.$$

$$\text{Тоді } a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}; \quad a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}.$$

У **Mathcad** для обчислення параметрів  $a_0$  та  $a_1$  призначені відповідно функції **intersept(x, y)** і **slope(x, y)** [8].

Нижче наведено фрагмент робочого документа **Mathcad**, що містить обчислення коефіцієнтів лінійної регресії  $a_0$  та  $a_1$  і відповідні графіки для представлених нижче експериментальних даних.

**Таблиця 5.5 – Експериментальні дані**

|   |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 0,7   | 0,8   |
| y | 1,156 | 1,332 | 1,553 | 1,705 | 1,831 | 2,204 | 2,388 | 2,656 |
| x | 0,9   | 1,0   | 1,1   | 1,2   | 1,3   | 1,4   | 1,5   |       |
| y | 3,019 | 3,081 | 3,299 | 3,486 | 3,692 | 3,867 | 3,896 |       |

Межі довірчих інтервалів в кожній точці  $X_0$  утворюють довірчу смугу або довірчий коридор. Ця смуга не є довірчою областю для всієї лінії регресії. Вона визначає тільки кінці довірчих інтервалів для  $y$  при кожному значенні  $x$ . За допомогою коридору регресії не можна, наприклад, побудувати одночасно два довірчих інтервали в різних точках  $x_0$  та  $x_1$ .

```

ORIGIN := 1    N := 15
i := 1..N    xi := i-0.1    yi := READ("c:\tmp\data5.txt")

a0 := intercept(x,y)    a0 = 0.925
a1 := slope(x,y)    a1 = 2.107

```

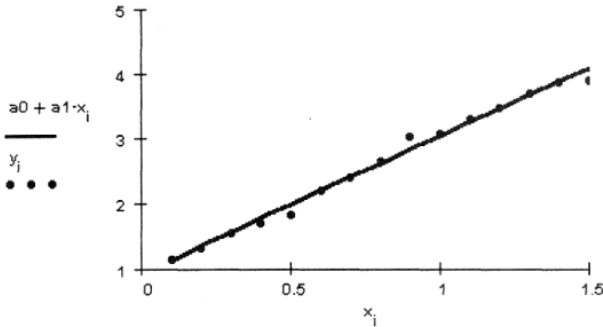


Рис. 5.8 – Фрагмент документа **Mathcad** з побудованим коридором регресії

Довірча область для всієї лінії регресії визначається за допомогою наступних рівнянь відповідно нижньої і верхньої меж смуги:

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x - 2f_{\alpha} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}; \quad (5.5)$$

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + 2f_{\alpha} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (5.6)$$

де  $f_{\alpha}$  – корінь рівняння  $F_{2,n-2}(f_{\alpha})=1-\alpha$ ;  $F_{2,n-2}(x)$  – функція розподілу Фішера з 2 та  $n-2$  ступенями свободи.

Нижче наведено фрагмент робочого документа **Mathcad**, що містить обчислення довірчої області регресії для вибірки, аналізованої у всіх попередніх прикладах.

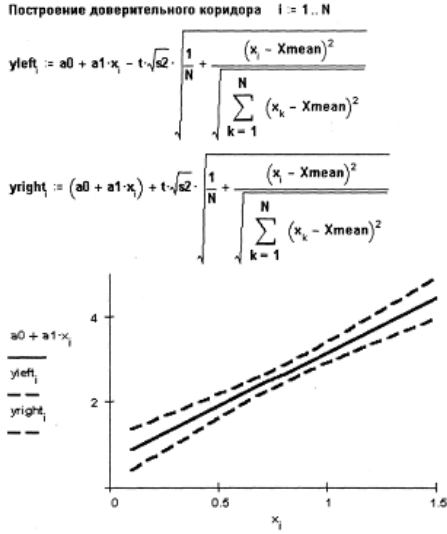


Рис. 5.9 – Фрагмент документа Mathcad з обчисленнями довірчої області регресії

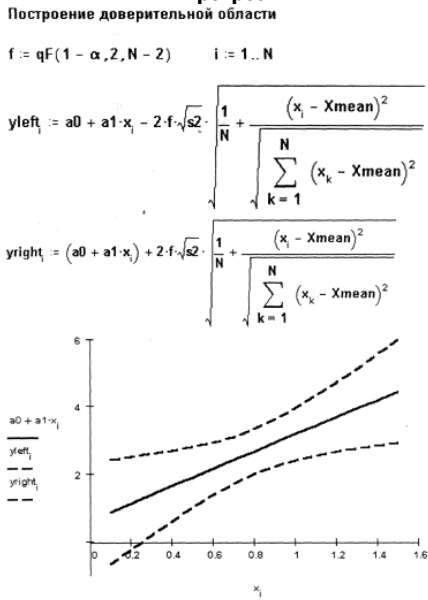


Рис. 5.10 – Фрагмент документа Mathcad, що дозволяють визначити



коефіцієнти і довірчі інтервали для коефіцієнтів лінійної регресії

*Приклад 6.* Обчислити коефіцієнти лінійної регресії.

**ORIGIN :=1 N :=15**

**i :=1..N x<sub>i</sub> := i · 0.1 y<sub>i</sub> :=READ("c:\tmp\data5.txt")**

**a0 :=intercept(x,y) a0 = 0.925**

**a1 :=slope(x,y) a1 = 2.107**

**Рис. 5.11 – Фрагмент документа Mathcad з обчисленнями**

*Приклад 7.* Обчислити довірчі інтервали для коефіцієнтів лінійної регресії.

```

ORIGIN :=1 N :=15
i :=1..N xi := i · 0.1 yi := READ("c:\tmp\data5.txt")
a0 := intercept(x,y) a0 = 0.925
a1 := slope(x,y) a1 = 2.107
yi := a0 + a1 · xi
Xmean := mean(x) Xmean = 0.8
Ymean := mean(y) Ymean = 2.611
s2 :=  $\frac{1}{N-2} \cdot \sum_{k=1}^N (y_k - y_{r_k})^2$ 
Построение доверительного интервала для a0
α :=1 t := qt(1 -  $\frac{\alpha}{2}$ , N - 2) t = 1.771
a0left := a0 - t · √s2 ·  $\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{Xmean^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - Xmean)^2}}$  a0left = 0.836
a0right := a0 + t · √s2 ·  $\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{Xmean^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - Xmean)^2}}$  a0right = 1.014
Доверительный интервал для a0 (0.836, 1.014)
Построение доверительного интервала для a1
a1left := a1 -  $\frac{t \cdot \sqrt{s2}}{\sum_{k=1}^N (x_k - Xmean)^2}$  a1left = 2.009
a1right := a1 +  $\frac{t \cdot \sqrt{s2}}{\sum_{k=1}^N (x_k - Xmean)^2}$  a1right = 2.205
Доверительный интервал для a1 (2.009, 2.205)

```

Рис. 5.12 – Фрагмент документа Mathcad с обчисленнями

## 6. АЛГОРИТМИ І СПОСОБИ ЇХ ОПИСАННЯ

В основі розв'язку будь-якої задачі лежить поняття алгоритму. Під алгоритмом прийнято розуміти точне розпорядження, що визначає обчислювальний процес та веде від змінних початкових даних до кінцевого результату. Таким чином, алгоритм повинен містити кінцеву послідовність кроків (операцій), що однозначно визначають процес переробки вихідних і проміжних даних у кінцевий результат.

### *6.1. Алгоритми і їхні властивості*

При складанні алгоритмів варто враховувати ряд вимог, виконання яких приводить до формування необхідних властивостей.

Алгоритм повинен бути однозначним, що виключає довільність тлумачення кожного з розпоряджень, і заданого порядку виконання. Ця властивість алгоритму називається визначеністю.

Реалізація обчислювального процесу, передбаченого алгоритмом, повинна через визначене число кроків привести до видачі результатів чи повідомлення про неможливість розв'язку задачі. Ця властивість алгоритму називається результативністю.

Розв'язок однотипних задач із різними вихідними даними можна здійснювати по тому самому алгоритму, що дає можливість створювати типові програми для розв'язку задач при різних варіантах завдання значень вихідних даних. Це властивість алгоритму називається масовістю.

Визначений алгоритмом обчислювальний процес можна розділити на окремі етапи, елементарні операції. Ця властивість алгоритму називається дискретністю.

Якщо алгоритм розглядати як сукупність розпоряджень по виконанню дій, то завжди необхідно виділяти ті об'єкти, над якими повинні здійснюватися запропоновані дії. Такими об'єктами є дані.

### *6.2. Способи опису алгоритмів*

Для строгого завдання різних структур даних і алгоритмів їхньої обробки потрібно мати таку систему формальних позначень і правил, щоб зміст будь-якого розпорядження трактувався точно та однозначно. Відповідні системи правил називають мовами описів.

До образотворчих засобів опису алгоритмів відносяться наступні основні способи їхнього представлення: словесний (запис природною мовою), структурно-стилізований (запис алгоритмічною мовою псевдокоду), графічний (зображення схем із графічних

символів), програмний (тексти на мовах програмування).

Словесний спосіб запису алгоритмів являє собою опис послідовних етапів обробки даних і задається в довільному викладі природною мовою.

Спосіб заснований на використанні загальноприйнятих засобів спілкування між людьми і з погляду написання труднощів для авторів алгоритмів не представляє. Однак для «виконавців» такі описи алгоритмів часто неприйнятні. Вони строго не формалізовані, страждають багатослівністю записів, допускають неоднозначність тлумачення окремих розпоряджень. Тому такий спосіб опису алгоритмів не має широкого поширення.

Структурно-стилізований спосіб запису алгоритмів засновано на формалізованому представленні розпоряджень, що задаються шляхом використання обмеженого набору типових синтаксичних конструкцій, представлених у зрозумілому для розробника алгоритму вигляді. Такі засоби опису алгоритмів часто називаються псевдокодами.

Мова графічних символів. Для зображення структур алгоритмів використовується сукупність блокових символів (блоків), що з'єднуються лінами передач керування. Таке зображення називається методом блок-схем. Як і псевдокод, метод блок-схем можна застосувати на будь-якому рівні абстракції. Оскільки алгоритми сприймаються в першу чергу візуально, їх варто зображувати таким чином, щоб структура виглядала чітко та виразно. Стислість, виразність і планомірність при проектуванні дозволяють створювати схеми алгоритмів високої якості.

У схемі алгоритму кожному типу дій (введенню вхідних даних, обчисленню значень виразів, перевірці умов, керуванню повторенням дій, закінченню обробки і т.п.) відповідає геометрична фігура, представлена у вигляді блокового символу (блоку), названого символом дії. Символи дії з'єднуються лініями переходів, що визначають черговість виконання дій (табл. 6.1).

**Таблиця 6.1 – Символьні позначення**

| Позначення   | Використання  |
|--|---|
|   | Початок, кінець, зупинка. Вхід і вихід у програму чи підпрограму. |
|   | Введення інформації.  |
|   | Обчислювальна дія чи послідовність обчислювальних дій.            |
|   | Перевірка умов.   |
|   | Початок циклу.  |
|   | Обчислення по підпрограмі, стандартній підпрограмі.               |
|   | Вивід, друк результатів на папір.                                 |
|  | Операції вводу-виводу з дисків.                                   |

## **7. МЕТОДИКА ПІДГОТОВКИ І РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ НА ПК**

Розв'язок задачі на ПК містить у собі наступні основні етапи, частина з яких здійснюється без участі ПК.

1. Постановка задачі, розробка математичної моделі.
2. Вибір методу чисельного розв'язку.
3. Розробка алгоритму і структури даних.
4. Реалізація алгоритму вхідною мовою ПК.
5. Підготовка завдань для ПК, введення програми.
6. Налаштування та випробування програми.
7. Розв'язок задачі на ПК, обробка та оформлення результатів розрахунку.

### ***7.1. Постановка задачі, розробка математичної моделі***

На цьому етапі на основі словесного формулювання задачі дослідження вибираються змінні, що підлягають визначенню, записуються обмеження, зв'язки між змінними, у сукупності утворюючі математичну модель розв'язку проблеми. У результаті інженерна задача здобуває вид формалізованої математичної задачі.

### ***7.2. Вибір методу чисельного розв'язку***

Для поставленої математичної задачі необхідно вибрати метод її чисельного розв'язку, що зводить розв'язок задачі до послідовності арифметичних і логічних операцій. Розробкою та вивченням таких методів займається розділ математики, названий чисельним аналізом. Прикладом чисельного методу є метод прямокутників для обчислення визначених інтегралів.

Обчислення визначеного інтеграла по цьому методі зводиться до послідовного розрахунку значень підінтегральної функції, їхньому підсумовуванню та множенню на величину кроку інтегрування.

Якщо завдання полягає в одержанні розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь із заданими початковими умовами (задача Коші), то для неї можна використовувати методи Ейлера, Рунге-Кутта, прогнозу-корекції та ін.

При виборі методу треба враховувати вимоги, пропоновані постановкою задачі, і можливості його реалізації на конкретному ПК: точність рішення, швидкість одержання результату, необхідні витрати оперативної пам'яті для збереження вихідних і проміжних даних і результатів (для задач великого обсягу), складність програмної

реалізації, трудомісткість підготовки програми і розв'язку задачі.

Спочатку, коли розв'язувані задачі не занадто громіздкі, а досвіду розв'язку задач на ПК у користувача недостатньо, перевагу варто віддавати або методам, найбільше простим для програмної реалізації, або методам, для яких існують засоби програмної підтримки, наприклад, у виді стандартних бібліотечних підпрограм.

### ***7.3. Розробка алгоритму і структури даних***

Якщо обраний для розв'язку задачі чисельний метод реалізовано у вигляді стандартної бібліотечної підпрограми, то алгоритм звичайно зводиться до опису і введення вхідних даних, виклику стандартної підпрограми і виводу результатів на екран чи на друк. Більш характерний випадок, коли стандартні підпрограми вирішують лише якусь частину задачі.

Якщо задача, для якої розробляється алгоритм, складна, то не слід відразу пробувати розв'язати всі проблеми. Сформований у даний час підхід до розробки складних програм складається в послідовному використанні принципів проектування зверху вниз, модульного та структурного програмування.

Чітка структуризація задачі, розбивка її на послідовність підзадач, реалізація підзадач окремими модулями, поступова деталізація логіки алгоритму, використання типових логічних конструкцій є гарними засобами, що дозволяють у розумний термін створювати працездатні програми для розв'язку складних задач.

Знання та використання цих принципів необхідно не тільки програмістам професіоналам, що створюють програмні комплекси, які містять десятки і сотні тисяч рядків, але і будь-яким інженерам та дослідникам, які вирішують професійні задачі за допомогою ПК.

Важливою складовою частиною розробки алгоритму є вибір складу і способів організації (структур) даних вихідних та проміжних результатів. Вибір складу, типів і структур даних звичайно виробляється із врахуванням особливостей реалізації алгоритму на тій чи іншій мові програмування. Якщо розробник програми володіє програмуванням на різних мовах, то в нього з'являється можливість вибрати мову, що найбільш відповідає структурі цієї задачі.

Розробка алгоритму завершується або представленням у вигляді графічної схеми, або записом за допомогою символів спеціальної мови проектування програм, названого псевдокодом. Ціль такого представлення полягає в тому, щоб ще до етапу програмування переконатися в правильності логіки розроблювального алгоритму.

#### ***7.4. Реалізація алгоритму вхідною мовою ПК.***

Уже при проектуванні алгоритму, можливо, була обрана певна алгоритмічна мова. Тепер має бути здійснене безпосереднє програмування – запис алгоритму вхідною мовою ПК. Практично всі мови програмування реалізують основні мовні конструкції та типи даних, додаткові ж можливості, що допускаються мовою реалізуються в них по різному. Тому при складанні програми обраною мовою для визначеного ПК варто ознайомитися із особливостями реалізації цієї мови. Спочатку рекомендується використовувати основні конструкції та типи даних мови, розширюючи діапазон застосовуваних засобів по мірі набуття досвіду програмування і практичного розв'язку задач на конкретному ПК.

При розробці та реалізації алгоритму спочатку не слід прагнути до одержання програм найкращих по швидкодії, обсягу потрібної пам'яті, зручності роботи з даними. Додатковий час витрачений на розробку програм і налагодження занадто складного алгоритму, може знецінити результати від його застосування, тому що вони будуть отримані занадто пізно.

Приведені міркування мають особливе значення для розв'язку нових науково-дослідних задач. Найчастіше в процесі експериментів з математичною моделлю, на основі аналізу отриманих результатів інженер-дослідник видозмінює модель, постановку задачі, формулює нові проблеми дослідження. Тому важливо отримати працездатну програму якомога раніше, жертвуючи при цьому спочатку якістю, компактністю, а часом і обчислювальною ефективністю алгоритму. Удосконалювання програми можна відкласти до більш пізнього часу, коли проведені експерименти дозволять уточнити постановку задачі, з'ясувати сферу застосовності програми, вимоги зручності введення вихідних даних і обробки результатів. З цього боку також корисно використовувати принцип модульності при розробці алгоритму, тому що програму, складену з модулів, легше модернізувати. Виділення в програмі модулів введення даних, розрахунку характеристик, виводу результатів дозволить локалізувати майбутні зміни в програмі в межах кожного модуля, а також використовувати деякі з них як готові блоки для нових постановок задач.

#### ***7.5. Підготовка завдання для ПК, введення програми***

Програма, складена алгоритмічною мовою, повинна бути введена в ПК. При введенні програми та її обробці використовуються



засоби системи програмного забезпечення, зокрема система програмування і операційна система. Порядок обробки вихідної програми і характеристика даних описуються за допомогою операторів мови програмування. Синтаксичний контроль рядків, що вводяться, і видача повідомлень про помилки виконуються безпосередньо при введенні.

### ***7.6. Налагодження і випробування програми***

При програмуванні і введенні даних із клавіатури в ПК можуть бути допущені помилки. Їхнє виявлення, локалізацію і усунення виконують на етапі налагодження та тестування програми.

Етап налагодження і тестування програми займає від 50 до 70% часу, затрачуваного на всі етапи створення програми і одержання розв'язку за допомогою ПК. У зв'язку з важливістю і трудомісткістю етапу налагодження всі сучасні системи програмування мають спеціальні засоби, що допомагають у виявленні та усуненні помилок. Також не треба забувати і про найпростіші засоби контролю, що вбудовуються в розроблювальну програму:

- друк введених даних безпосередньо після їх вводу;
- друк проміжних результатів у вузлових точках.

Але головне – треба максимально спростувати структуру програми за рахунок розділення її на модулі і використання конструкцій мови, найбільш простих та освоєних програмістом.

### ***7.7. Розв'язок задачі на ПК, обробка і оформлення результатів розрахунку***

На цьому етапі ПК виконує всі передбачені програмою обчислення і видає результати на екран дисплея чи на друк. Щоб полегшити наступну обробку результатів розрахунку, треба при проектуванні програми передбачати вивід результатів із поясненнями, яким перемінним відповідають виведені числа, таблицям результатів повинні передувати заголовки, одні групи даних варто відокремлювати від інших пропусками рядків, при табулюванні функцій корисно вказувати і значення аргументів, а якщо функції залежать від параметрів, то перед видачею значень функції варто вказати і значення параметрів.

Узагалі, оскільки варіант розв'язуваної інженерної задачі являє собою по суті, результати деякого експерименту на математичній моделі, перед друком результатів треба передбачати друк даних, що характеризують умови експерименту.

Хоча спочатку при недостатньому досвіді програмування не слід захоплюватися формою представлення результатів, усе-таки якийсь час варто приділяти цим питанням, тому що в остаточному підсумку це скорочує трудомісткість наступної обробки даних. Доцільно відпрацьовувати форму представлення виведених даних на спробних прогонах програми, аналізуючи результати на екрані.

## 8. ПОШУК ГЛОБАЛЬНОГО ОПТИМУМУ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОГРАМНИХ КОМПЛЕКСІВ OPTIMIZATION MODEL TA PLANNING EXPERIMENT

Якщо в загальному розглянути проблему пошуку оптимуму то її можна описати як отримання бажаної реакції об'єкта при певній дії на нього (рис. 8.1). Об'єкт має певні властивості і функціональні можливості. Вплив на об'єкт призводить до його реакції, яка визначає взаємозв'язок властивостей і функціональних можливостей. Якщо цей взаємозв'язок, між впливом і реакцією відомий то завдання оптимізації - це визначення, як впливати на об'єкт щоб отримати бажану реакцію об'єкта.

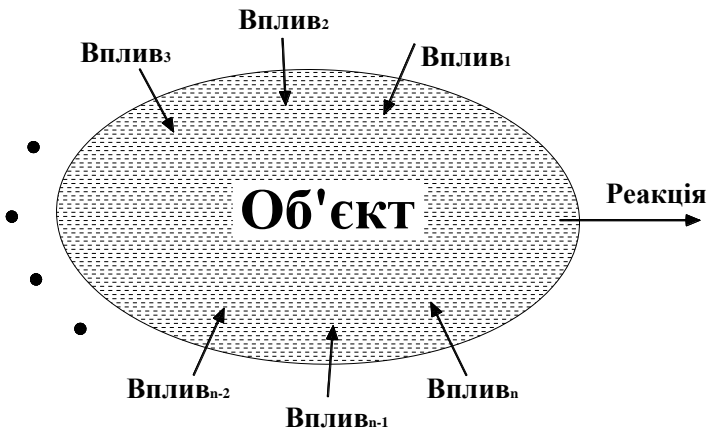


Рис. 8.1 – Схема впливу на об'єкт

Вирішення задач здійснюється на основі нової високоєфективної технології нелінійної оптимізації, яка дозволяє швидко і ефективно вирішувати багатопараметричні завдання для

необмеженого числа змінних. Як об'єкт оптимізації може використовуватися:

- математична модель;
- натурний об'єкт;
- статистичні дані.

Програмні комплекси **OptimizationModel** та **PlanningExperiment** розроблені з використанням мови **Java** і можуть бути використані в різних операційних системах (**Windows, Linux, Solaris, Unix** та ін.).

Програмні комплекси дозволяють:

- значно скоротити витрати і час їх виконання;
- отримувати унікальні технічні рішення за рахунок вирішення завдань великої розмірності, що недоступно при використанні традиційних методів оптимізації, а саме:

- оптимального проектування окремих елементів і системи в цілому;
- оптимального узгодження між собою вхідних до складу системи елементів;
- визначення оптимальних законів управління.

Особливістю цієї технології є висока ефективність пошуку оптимального рішення при дослідженні технічних систем, що моделюються на високих рівнях складності та ієрархічності, включаючи останні досягнення математичного моделювання. Як приклад технологію успішно можна застосовувати при вирішенні наступних проблем:

- здобуття найбільш ефективних технічних рішень, за рахунок оптимізації моделей систем великої розмірності і забезпечення екстремальності критерію ефективності технічної системи і її елементів в широкому діапазоні режимів роботи;
- визначення оптимальних проектних рішень по комплексному критерію «ефективність-вірогідність», «ефективність-вартість» та ін.;
- визначення оптимальних законів управління складними пристроями на різних їх режимах роботи;
- обґрунтування вимог до рівня технології виробництва окремих елементів технічної системи;
- визначення вірогідності реалізації проектних показників для заданого рівня технології виробництва.

### ***8.1 Установка і запуску програмних комплексів.***

Для установки необхідних програмних комплексів, попередньо, потрібно встановити мову програмування **Java**. Для цього:

1. Для роботи програми заздалегідь необхідно встановити віртуальну машину **Java**, яку можна знайти за наступною адресою <http://java.sun.com/j2se/1.4/download.html>. За вказаною адресою знаходиться **Java Development Kit (JDK)**. Для запуску досить проінстальовати **JDK**.

2. Після установки для запуску програми використовується пакетний файл або командний рядок (табл. 8.1). Нижче описані можливі варіанти для операційної системи **Windows**. Для **Linux/unix** пакетні файли мають розширення **\*.sh** замість **\*.bat**, а в командний рядок замість роздільника **;"** використовувати роздільник **":"**

3. Параметри вказані в кутових дужках **"<..>"** є обов'язковими, а параметри вказані в квадратних дужках **"[...]"** є необов'язковими.

**Таблиця 8.1 – Варіанти запуску програмних комплексів**

| Опис   | Пакетний файл / Командний рядок   |
|--|---|
| Графічний інтерфейс  | <b>OptimizationModelGUI.bat</b><br>java -cp .;OptimizationModel.jar<br>OptimizationModel  |
| Консольний запуск пошуку оптуму для вказаної моделі                                  | <b>OptimizationModel.bat [aaqm aam gzm] &lt;FileName&gt;</b><br>java -cp .;OptimizationModel.jar<br>OptimizationModelSolver [aaqm aam gzm] <FileName> |
| Графічний інтерфейс планування експерименту  | <b>PlanningExperimentGUI.bat</b><br>java -cp .;OptimizationModel.jar<br>PlanningExperiment  |
| Консольний запуск планування експерименту з відкриттям файлу експериментальних даних | <b>PlanningExperiment.bat &lt;FileName&gt;</b><br>java -cp .;OptimizationModel.jar<br>PlanningExperimentSolver <FileName>                             |
| Графічний інтерфейс редактора моделі для пошуку оптуму                               | <b>MathematicalModelGUI.bat</b><br>java -cp .;OptimizationModel.jar<br>MathematicalModel  |
| Компіляція файлу моделі пошуку оптуму  | <b>MathematicalModel.bat &lt;FileName&gt;</b><br>javac -cp .;OptimizationModel.jar<br><FileName>  |

4. Якщо при запуску програми виникає помилка, пов'язана з браком пам'яті, необхідно змінити значення параметра **-Xmx1000m**, який визначає доступний розмір оперативної пам'яті для віртуальної машини **Java**.

Мінімальні вимоги до обладнання:

- **Pentium II**;
- Оперативна пам'ять – 64 МБ;
- Місце на жорсткому диску 200 МБ;
- Віртуальна машина **Java**.

## 8.2. Використання програмних комплексів.

Під об'єктом оптимізації можна розглядати що завгодно. Головним показником для можливості дослідження оптимуму – це взаємозв'язок між впливом і реакцією, яка описується з урахуванням основних властивостей і функціональних можливостей об'єкта.

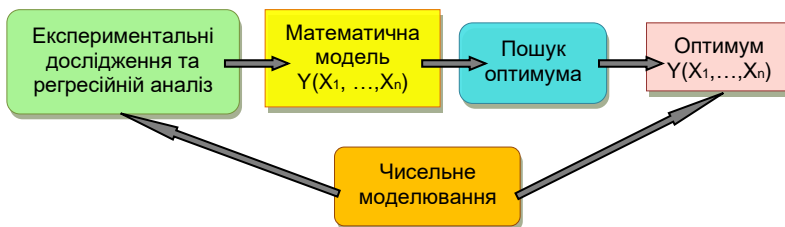


Рис. 8.2 – Модулі програмного комплексу

**OptimizationModel** – це програмний комплекс, що складається з модулів, які можуть працювати як окремі програми с графічним інтерфейсом або з консолі.

Програмний комплекс включає наступні модулі:

- пошук оптимуму (ПО);
- математична модель (ММ);
- експериментальні дослідження і регресійний аналіз (ЕДРА);
- чисельне моделювання (ЧМ).

Пошук оптимального рішення може бути виконаний кількома шляхами (рис. 8.3):

- математична модель --> пошук оптимума (ММ --> ПО);
- експериментальні дослідження і регресійний аналіз --> математична модель --> пошук оптимума (ЕДРА-->ММ--> ПО);
- чисельне моделювання --> експериментальні дослідження і регресійний аналіз --> математична модель --> пошук оптимума (ЧМ--> ЕДРА -->ММ-->ПО)
- чисельне моделювання --> пошук оптимума (ЧМ --> ПО)

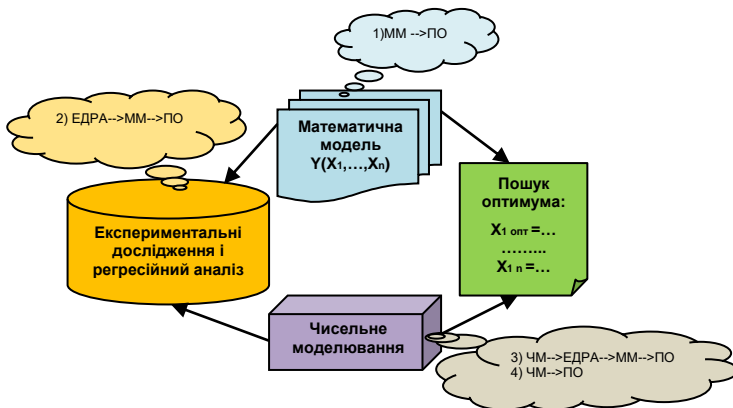


Рисунок 8.3 – Схема пошуку оптимального рішення

### 8.3. Математична модель.

Пошук глобального оптимуму для задач оптимального проектування систем або визначення оптимальних законів керування здійснюється на основі нової високоефективної технології нелінійної оптимізації, яка дозволяє швидко і ефективно вирішувати багато параметричні завдання для необмеженої кількості змінних.

Для опису об'єкта оптимізації використовується структура даних, яка описує математично досліджуваний об'єкт і задає початкові, граничні умови, а також критерій пошуку глобального оптимуму. Модель описується за правилами створення класів для мови програмування **Java** (успадковує клас **OptimizationModelObject**) і має наступну структуру:

```
public class test_001 extends OptimizationModelObject{
```

```
    // Інтервали вхідних параметрів
    private float[][] interval_x = {
        {48.0f, 112.0f},
        {20.7f, 62.1f},
        {3.0f, 5.0f},
    };
```

```
    // Метод повертає масив з інтервалу вхідних параметрів
    public float[][] get_interval(){ return interval_x; }
```

```
    // Метод повертає значення дискретизації області вхідних параметрів
    public int get_digitization_area_values(){ return 3; }
```

```

// Метод повертає значення дискретизації області значень
public int get_digitization_values(){ return 100; }

// Метод повертає значення відносної точності
public float get_precision(){ return 0.001f; }

// Метод повертає значення критерію оптимізації
// Минимум = -Double.MAX_VALUE
// Максимум = Double.MAX_VALUE
public double get_criterion_optimization(){ return -Double.MAX_VALUE; }

// Метод використовується для включення(true) / вимикання(false)
виводу на екран часткових розрахунків
public boolean is_debug(){return false;}

// Метод описує модель і повертає значення параметра оптимізації
// X - масив вхідних параметрів
public double function(double[] X){
    double y = 0.3000000019868215 -0.17749999463558197*(X[0]-48.0)/64.0 +
    0.1262500025331974*(X[1]-20.7)/41.399998 + 0.14874999597668648*(X[2]-
    3.0)/2.0 -0.14750000089406967*(X[0]-48.0)/64.0*(X[0]-20.7)/41.399998 -
    0.16249998658895493*(X[0]-48.0)/64.0*(X[0]-3.0)/2.0 +
    0.06499999761581421*(X[1]-20.7)/41.399998*(X[1]-3.0)/2.0 +
    0.11000000437100729*Math.pow((X[0]-48.0)/64.0,2) +
    0.022500005861123412*Math.pow((X[1]-20.7)/41.399998,2) +
    0.0774999832113584*Math.pow((X[2]-3.0)/2.0,2);
    return y;
}
}
}

```

Після опису моделі її зберігають у файлі з назвою класу **test\_001.\*** і розширенням **\*.java (test\_001.java)**. Отриманий файл моделі **test\_001.java** необхідно відкомпілювати використовуючи команду:  
для **Windows**:

```
javac -cp .;%CLASSPATH%; OptimizationModel.jar test_001.java
```

для **Linux/Unix**:

```
javac -cp .:$CLASSPATH: OptimizationModel.jar test_001.java
```

При успішній компіляції буде створено файл з тим же ім'ям **test\_001.\*** і з розширенням **\*.class (test\_001.class)**.

#### *8.4. Приклад пошуку глобального оптимуму.*

Пошук глобального оптимуму може виконуватися в двох варіантах:

- використовуючи командний рядок (консольний варіант);
- використовуючи графічний інтерфейс.

Розглянемо консольний варіант пошук глобального оптимуму. Для запуску пошуку глобального оптимуму достатньо використати команду з консолі **java [CLASSPATH] OptimizationModelSolver [SOLVER] <MODEL>**

де:

**CLASSPATH** – параметр описує шлях до бібліотеки **OptimizationModel.jar**;

**SOLVER** – параметр вказує яку методику використовувати (**aaam aaqm gzm**), якщо жоден параметр не вказано тоді використовуються всі методики;

**MODEL** – ім'я файлу моделі (математична модель).

При запуску **OptimizationModelSolver** буде проведено пошук глобального оптимуму з використанням декількох методик (табл. 8.2).

**Таблиця 8.2 – Запуск OptimizationModelSolver**

| Операційна система | Командний рядок  |
|--------------------|--|
| Windows            | <b>java -cp .;%CLASSPATH%;OptimizationModel.jar OptimizationModelSolver test_001</b> |
| Linux/Unix         | <b>java -cp .:\$CLASSPATH:OptimizationModel.jar OptimizationModelSolver test_001</b> |

Результат розрахунку прикладу моделі **test\_001** представлений нижче.

**\*\*\* Start optimization \*\*\***

**Sun Feb 24 17:15:08 EET 2008**

**Solver - aaqm**

**Matrix of parameters of model**

**X1 = 48.0 ...112.0**

**X2 = 20.7 ...62.1**

**X3 = 3.0 ...5.0**

**Digitization of area of values: 3**

**X1 = 48.0 ... 69.333336 ... 90.66667 ... 112.0**

**X2 = 20.7 ... 34.5 ... 48.3 ... 62.1**

**X3 = 3.0 ... 3.666667 ... 4.333335 ... 5.0**

**Optimal Rezult for step(294): Y(X1, ..., Xn) = -8.94903307855923**

**X1 = 112.0 X2 = 20.700000762939453 X3 = 3.0**



Solving time (hh:mm:ss) 00:00:00

(total: 47 ms)

Steps: 384

\*\*\* End optimization \*\*\*

\*\*\* Start optimization \*\*\*

Sun Feb 24 17:15:08 EET 2008

Solver - aam

Matrix of parameters of model

X1 = 48.0 ...112.0

X2 = 20.7 ...62.1

X3 = 3.0 ...5.0

Digitization of area of values: 3

X1 = 48.0 ... 69.333336 ... 90.66667 ... 112.0

X2 = 20.7 ... 34.5 ... 48.3 ... 62.1

X3 = 3.0 ... 3.666667 ... 4.333335 ... 5.0

Optimal Result for step(588):  $Y(X_1, \dots, X_n) = -8.94903307855923$

X1 = 112.0 X2 = 20.700000762939453 X3 = 3.0

Solving time (hh:mm:ss) 00:00:00

(total: 16 ms)

Steps: 768

\*\*\* End optimization \*\*\*

\*\*\* Start optimization \*\*\*

Sun Feb 24 17:15:08 EET 2008

Solver - gzm

Matrix of parameters of model

X1 = 48.0 ...112.0

X2 = 20.7 ...62.1

X3 = 3.0 ...5.0

Digitization of area of values: 3

X1 = 48.0 ... 69.333336 ... 90.66667 ... 112.0

X2 = 20.7 ... 34.5 ... 48.3 ... 62.1

X3 = 3.0 ... 3.666667 ... 4.333335 ... 5.0

Optimal Result for step(2108):  $Y(X_1, \dots, X_n) = -8.94903307855892$

X1 = 111.99999999999864 X2 = 20.700000762939453 X3 = 3.0

Solving time (hh:mm:ss) 00:00:00

(total: 46 ms)

Steps: 134912

\*\*\* End optimization \*\*\*

В результаті розрахунку прикладу моделі **test\_001** для функції  $Y(X_1, X_2, X_3) = \dots$  знайдені значення  $X_1, X_2, X_3$  при яких  $Y$  прямує до мінімуму (табл.8.3).

**Таблиця 8.3 – Результати розрахунку**

| <b>Методика</b> | <b>X1</b> | <b>X2</b> | <b>X3</b> | <b>Час<br/>вирішення</b> | <b>Кіл-сть<br/>ітерацій</b> | <b>Y</b> |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|--------------------------|-----------------------------|----------|
| <b>aaqm</b>     | 112.0     | 20.700    | 3.0       | 47 ms                    | 384                         | -8.949   |
| <b>aam</b>      | 112.0     | 20.700    | 3.0       | 16 ms                    | 768                         | -8.949   |
| <b>gzm</b>      | 111.999   | 20.700    | 3.0       | 46 ms                    | 134912                      | -8.949   |

## 9. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

### *9.1 Загальні вимоги до звіту по лабораторним роботам*

1. Звіт по лабораторним роботам має бути представлений у наступному вигляді: титульний аркуш; завдання; патентний огляд, опис конструкції, математична модель, обґрунтування вибору критерію оптимуму, параметрів, кроку, тощо; опис структури алгоритму; програма; початкові дані та результати розрахунку; висновки.

Особливу увагу необхідно надати виконанню розрахунків математичної моделі. Потрібно вибрати змінні та сталі параметри, і задати числові значення, враховуючи одиниці вимірювання заданих параметрів.

2. При вирішенні задачі необхідно передбачати перевірку на коректне введення значень та можливість виникнення критичних ситуацій (ділення на нуль, тощо).

3. Оформлення звіту повинно мати зрозумілий вигляд тобто мати необхідні пояснення.

Звіт поділений на декілька етапів, тобто на вісім лабораторних робіт. Якщо у здобувача, є певні розробки майбутньої конструкції пристрою (установки, механізму, тощо) та, є певні нотатки, математичної моделі майбутньої дисертаційної роботи, здобувач, може працювати по своїй темі. Для тих, хто ще не зовсім визначився, запропоновано вибрати із представлених завдань для самостійної роботи, варіант механізму, що є найближчим до теми майбутньої дисертаційної роботи. Це дозволить здобувачу не витратити час даремно, а працювати, безпосередньо зі своєю дисертаційною тематикою.

### *Лабораторна робота №1-2.*

**Тема:** Огляд літературних джерел за темою дослідження.

**Мета:** Визначитися зі змістом майбутньої дисертаційної роботи, та провести невеличкий патентний пошук існуючих конструкцій по даній науковій тематиці.

### **Порядок виконання роботи**

Відповідно до виданого варіанту завдання потрібно провести аналітичний огляд літературних джерел та патентний пошук відомих конструкторських рішень, на основі якого, виконати опис конструкції пристрою чи механізму.

Починаючи роботу над першим етапом, потрібно якомога ширше ознайомитися з літературою з даного питання. Основна література, на початку роботи, рекомендується науковим керівником. Вона допоможе охопити коло тих питань, з якими доведеться працювати. Цієї літератури достатньо лише на початковій стадії роботи. Адже, у процесі ознайомлення зі змістом досліджуваної проблеми виникають питання, які недостатньо або зовсім не висвітлені у проведеному пошуку. Крім того, темпи наукових досліджень зараз настільки великі, що потрібна інформація може бути опублікована за час виконання досліджень на тему дипломної роботи. Тому перше, на що варто звернути увагу – це знаходженням джерел, що містять необхідні відомості.

Рекомендований розмір першого етапу звіту, повинен мати обсяг від п'яти до семи сторінок формату А4.

#### *Лабораторна робота №3-4.*

**Тема:** Опис конструкції пристрою (установки, механізму, тощо). Вибір та обґрунтування математичної моделі. Вибір критеріїв оптимізації.

**Мета:** Визначити основний параметр глобального пошуку оптимума і сталі та змінні параметри (фактори).

#### **Порядок виконання роботи**

Відповідно до виданого завдання, провести вибір та обґрунтування математичної моделі. Визначити сталі та змінні параметри. Визначити діапазон використання змінних входних параметрів та крок перебору. Розробити модель-завдання для пошуку оптимума. А саме:

- визначити параметр пошуку глобального оптимума та напрямок пошуку (до max чи до min);
- визначити фактори, що будуть суттєво впливати на кінцевий результат пошуку глобального оптимума;
- встановити граничний діапазон для змінних параметрів;
- задати для кожного сталого параметра математичної моделі, числове значення.

#### *Лабораторна робота №5-6.*

**Тема:** Пошук оптимальних параметрів конструкції з програмою **OptimizationModel**.

**Мета:** Ознайомитися та навчитися працювати з програмою **OptimizationModel**.

#### **Порядок виконання роботи**

Розробити програму для визначення вихідних параметрів математичної моделі процесу перебором можливих вхідних параметрів і визначити оптимальні вихідні параметри.

Вхідні параметри, що необхідні для розрахунку вводяться в програмі **OptimizationModel** (див. розділ 8.2).

Результат повинен бути представлений у вигляді текстового файлу, що містить початкові дані, розрахунок та кінцевий результат по трьом методикам пошуку оптимума.

### *Лабораторна робота №7.*

**Тема:** Планування експерименту за допомогою програмного комплексу **PlanningExperiment**.

**Мета:** Ознайомитися та навчитися працювати з програмним комплексом **Planning Experiment**. Створення матриці планування. Введення значень.

#### **Порядок виконання роботи**

Провести планування експерименту за допомогою програмного комплексу **PlanningExperiment** (див. розділ 8.2). Створення матриці планування. Введення значень. Розробка програми на основі одержаного рівняння регресії по трьом основним методикам.

Вхідні параметри, що необхідні для розрахунку вводяться в програмі за допомогою графічного інтерфейсу.

Результат повинен бути представлений у вигляді текстового файлу, що містить початкові дані, розрахунок та кінцевий результат по трьом методикам пошуку оптимума.

### *Лабораторна робота №8.*

**Тема:** Робота з отриманими результатами по двох програмних комплексах.

**Мета:** Навчитися аналізувати отримані результати за трьома методиками пошуку оптимума, на основі двох програмних комплексів. Оформлення звіту. Висновки.

#### **Порядок виконання роботи**

Робота з результатами отриманими на основі розрахунків по трьом методикам, за допомогою програмних комплексів **OptimizationModel** та **PlanningExperiment**.

Результат повинен бути представлений у вигляді таблиці де розписано діапазон вхідних даних та кінцевий результат (див. табл. 8.3).

Потрібно, також, врахувати момент, що значення отриманого

оптимуму, за двома програмним комплексами, має збігатися. В іншому випадку, потрібно знову повернутися до етапу вибору змінних та сталих параметрів (факторів) та їх числових значень.

### ***9.2 Обробка результатів експерименту та оформлення звіту.***

Кожен здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії повинен самостійно обробити результати виконаних ним дослідів і скласти звіт з лабораторної роботи. Звіт, крім назви роботи, індексу навчальної групи, повинен містити наступні відомості:

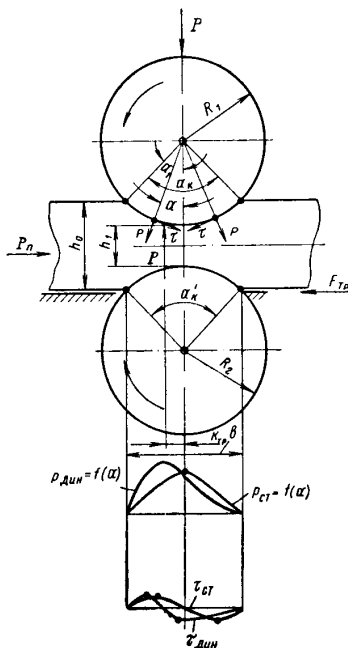
- патентний огляд;
- опис конструкції пристрою;
- математична модель;
- розрахунки за допомогою програмних комплексів;
- висновки, щодо роботи.

Усі рисунки, таблиці, схеми, що приводяться в звіті, повинні бути пронумеровані та підписані. При виконанні розрахунків рекомендується користуватися калькуляторами.

В останньому розділі звіту – у висновку про виконану роботу – здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії повинен дати оцінку одержаних за допомогою програмних комплексів розрахунків. Звіт повинен бути лаконічним, але таким, щоб його зміст був зрозумілим без додаткових усних пояснень.

## 10. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ ОСВІТНЬО-НАУКОВОГО РІВНЯ ДОКТОР ФІЛОСОФІЇ

1. Подача листового матеріалу двома роликками (рис. 10.1).



**Рис. 10.1** – Схема дії сил у процесі подачі листового пружно-пластичного матеріалу двома роликками

Статичний тиск роликів на матеріал визначається за формулою:

$$p_{ст} = \frac{2ER}{h_0} (\cos \alpha - \cos \alpha_k)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу;  $R$  – радіус роликів;  $h_0$  – початкова товщина матеріалу;  $\alpha$  – поточне значення кута обхвату;

$\alpha_k = \arccos\left(1 - \frac{h_0 - h_1}{2R}\right)$  – кут контакту ролика з матеріалом;  $h_1$  – найменша товщина матеріалу при проходженні його між роликками.

2. При подачі матеріалу роликом по площині сила притискання ролика  $P$  (рис.10.2) залежить від максимальної сили подачі матеріалу  $F_{\max}$  та коефіцієнтів тертя  $f_1, f_2$  і визначається формулою:

$$P = \frac{F_{\max}}{f_1 - f_2}.$$

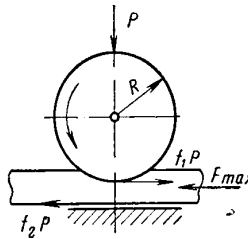


Рис. 10.2 – Схема подачі матеріалу роликом по площині

3. При подачі валками пластичного матеріалу (рис. 10.3) силу тиску валків при значній ширині  $l$  матеріалу визначають за формулою:

$$P = 2K_n \sigma_m l \sqrt{\frac{R}{\Delta h} \frac{h_{н.ш}}{\delta - 1} \left[ \left( \frac{h_{н.ш}}{h_k} \right)^\delta - 1 \right]},$$

де  $K_n$  – коефіцієнт, що враховує перевищення величини напруження по відношенню до границі текучості матеріалу  $\sigma_m$ ;  $R$  – радіус валків;  $\Delta h$  – різниця між початковою та кінцевою товщиною матеріалу;  $h_{н.ш}$  – товщина нейтрального шару;  $\delta$  – коефіцієнт відносного стиснення матеріалу;  $h_k$  – кінцева товщина матеріалу.



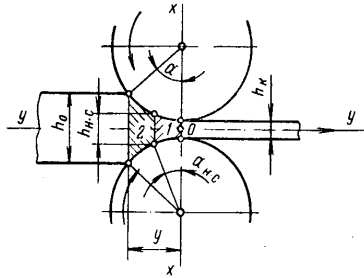


Рис. 10.3 – Схема подачі пластичного матеріалу валками

4. Подача матеріалу рейкою і лапкою, найбільш поширений спосіб переміщення, що використовується в більшості типів швейних машин (рис. 10.4).

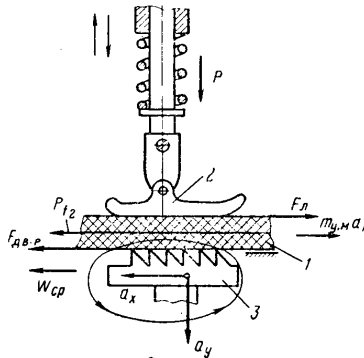


Рис. 10.4 – Схема подачі матеріалу рейкою і лапкою

Умова руху верхньої та нижньої тканин виражають нерівністю:

$$P \geq \frac{m_{д.м} a_2}{f_1 - f_3},$$

де  $P$  – сила тиску лапки на матеріал;  $m_{д.м}$  – маса ділянки тканини, що отримує прискорення;  $a_2$  – прискорення лапки при русі в горизонтальній площині;  $f_1$  – коефіцієнт тертя між рейкою та нижньою тканиною;  $f_3$  – коефіцієнт тертя між лапкою та верхньою

тканиною.

5. Для зменшення коефіцієнта тертя між лапкою та верхньою тканиною використовують подачу матеріалу рейкою і роликком.

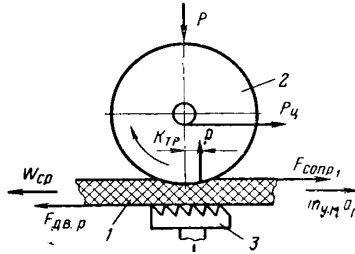


Рис. 10.5 – Схема подачі матеріалу рейкою і роликком

Рухійна сила рейки визначається з виразу:

$$P_p \geq F_{опр} \pm m_{д.м} a_2,$$

де  $F_{опр}$  – сила опору;  $m_{д.м}$  – маса ділянки тканини, що отримує прискорення;  $a_2$  – прискорення лапки при русі в горизонтальній площині.

6. Переміщення матеріалу на крутих поворотах (наприклад при зшиванні заготовок взуття) краще здійснювати з використанням замість рейки колеса, яке обертається. Воно називається позивним.

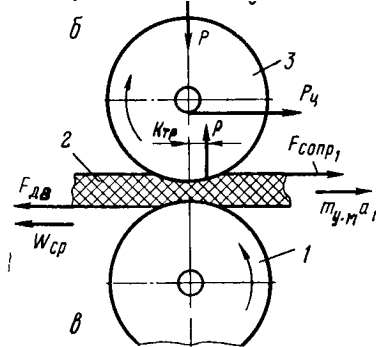


Рис. 10.6 – Схема подачі матеріалу позивним колесом і роликком

Рухійна сила позивного колеса визначається формулою:

$$P_p \geq F_{опр} + m_{д.м} a_z,$$

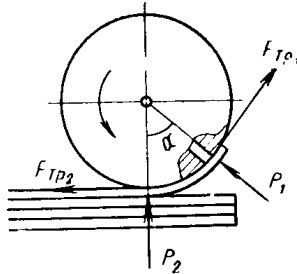
де  $F_{опр}$  – сила опору;  $m_{д.м}$  – маса ділянки тканини, що отримує прискорення;  $a_z$  – прискорення лапки при русі в горизонтальній площині.

Потужність, необхідна для переміщення матеріалу:

$$N = \frac{2P_p \omega}{1000},$$

де  $\omega$  – швидкість переміщення матеріалу.

7. Для подачі м'яких листових матеріалів з пачки використовують пневматичні захвати (рис. 10.7).



**Рис. 10.7 – Схема дії сил при вакуумному захваті матеріалу роликвим захватом**

Колова сила, або зусилля розтягування деталі, визначається за формулою:

$$P = f_1 P_1 \frac{e^{f_1 \alpha} - 1}{e^{f_1 \alpha}},$$

де  $f_1$  – коефіцієнт тертя між захватом та матеріалом;  $P_1$  – сила присмоктування, що діє на матеріал;  $\alpha$  – кут повороту захвата.

Сила присмоктування визначається з виразу:

$$P_1 = S(p_0 - p_1),$$

де  $S$  – площа перерізу отвору для входу повітря;  $p_0$ ,  $p_1$  – тиск повітря поза та всередині вакуумного захвату.

8. При подачі ниток у швейній машині по циліндричній опорі сила натягу нитки визначається за формулою:

$$F_2 = F_1 e^{-f\alpha}$$

де  $F_1$  – сила натягу набігаючої частини нитки;  $f$  – коефіцієнт тертя між ниткою та опорною;  $\alpha$  – кут обхвату опорі.

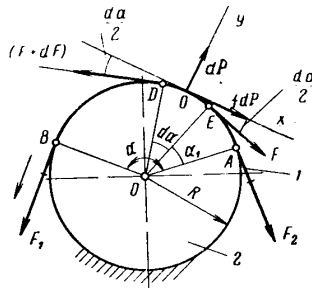


Рис. 10.8 – Схема руху нитки при ковзанні її по циліндричній опорі

9. Різання матеріалів методом ножа використовують на операціях вирубання, двійння тощо. В процесі різання матеріал 1 (рис.

10.9) лежить на опорі 2, а різак 3 під дією сили  $F_{piз}$  траверси преса проникає в товщину матеріалу 1, прорізавши його впирається в опору.

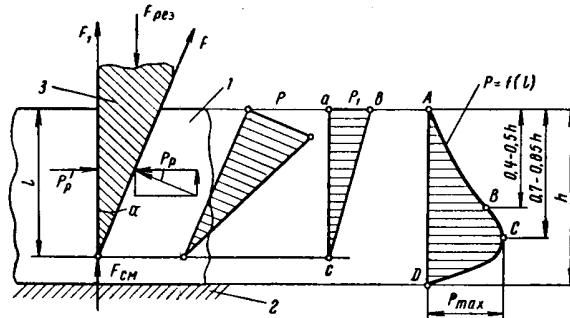


Рис. 10.9 – Схема вирубання деталей з листового матеріалу

Загальна сила різання визначається емпіричною залежністю:

$$F_{piз} = F_{piз.num} L k_1 k_2 k_3$$

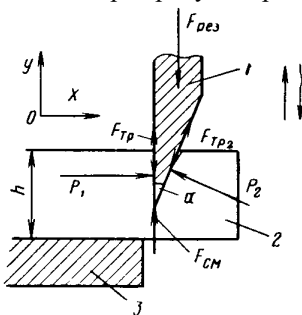
де  $F_{різнит}$  – питома сила різання;  $L$  – периметр різака;  $k_1$  – коефіцієнт, що враховує вплив кута заточки різака;  $k_2$  – коефіцієнт, що враховує вплив затуплення ріжучої кромки різака;  $k_3$  – коефіцієнт, що враховує вплив швидкості різання.

Потужність електродвигуна преса визначається формулою:

$$N = \frac{\frac{F_{\max} h}{2} + A_{mp}}{\eta(\tau_p + \tau_x) \cdot 1000},$$

де  $F_{\max}$  – найбільша сила різання;  $h$  – товщина матеріалу;  $A_{mp}$  – робота сил тертя механізму преса за один період;  $\eta$  – ККД преса;  $\tau_p$ ,  $\tau_x$  – час різання та час холостого ходу.

10. Для вирізання деталей за контуром застосовують різання з використанням коливань ножа поперек ріжучої кромки.



**Рис. 10.10** – Схема різання з використанням коливань ножа поперек лева

Потужність, що витрачається на один цикл роботи преса обчислюємо за формулою:

$$N = \frac{(A_{px} + A_{xx}) n_k}{1000},$$

де  $A_{px}$ ,  $A_{xx}$  – робота ножа відповідно при робочому та

холостому ході;  $n_k$  – частота коливань ножа.

11. Двійня використовується у взуттєвому виробництві на операції поздовжнього різання матеріалу нерухомим ножом 1 (рис. 10.11).

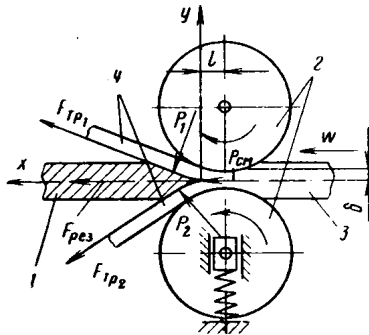


Рис. 10.11 – Схема різання способом двійня

Потужність, що витрачається на процес двійня знаходимо за формулою:

$$N = \frac{2F_{кл}\omega}{1000},$$

де  $F_{кл}$  – колове зусилля валка;  $\omega$  – швидкість подачі матеріалу.

12. При обробці краю накладеної на взуття підшови, а також бокової поверхні каблука використовують фрезерування. Зуб фрези 1 (рис. 10.12), рухаючись на матеріал 2, знімає з нього певний шар у вигляді стружки.

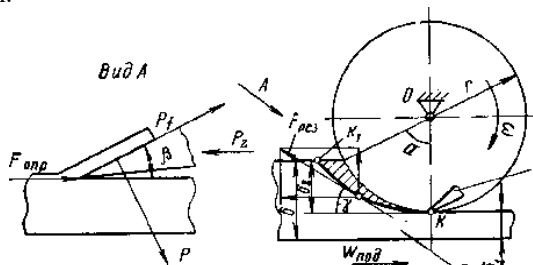


Рис. 10.12 – Схема фрезерування матеріалу

Середня сила різання визначається за формулою:

$$F_{cp} = q_p b \frac{l_z zh}{\pi D},$$

де  $q_p$  – питомий опір різанню;  $b$  – ширина фрезерування;  $l_z$  – подача на один зуб фрези;  $z$  – число зубів фрези;  $h$  – глибина фрезерування;  $D$  – діаметр фрези.

Середня потужність на фрезерування:

$$N = \frac{F_{cp} l_z z n}{1000},$$

де  $n$  – частота обертання фрези.

13. На рисунку 10.13 показано схему дії сил на голку при проколюванні нею матеріалів.

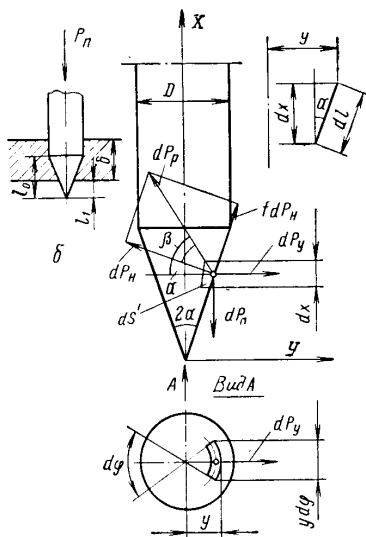


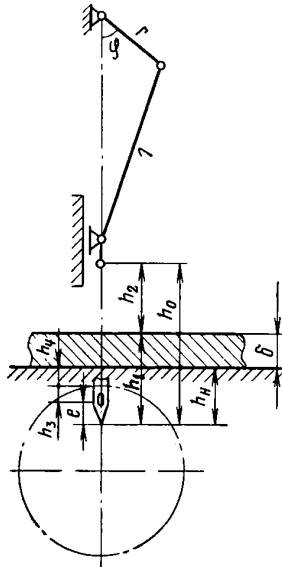
Рис. 10.13 – Схема проколювання матеріалу

Максимальне значення сили проколювання матеріалу визначається за формулою:

$$P_{np.max} = \frac{\pi E \delta}{3} (tg\alpha + f) \left[ \frac{4\delta^2 tg^2 \alpha}{D} + 3D \cdot (D - 2\delta \cdot tg\alpha) \right],$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу;  $\delta$  – товщина матеріалу;  $\alpha$  – половина кута загострення голки;  $f$  – коефіцієнт тертя між голкою та матеріалом;  $D$  – діаметр голки.

14. На рисунку 10.14 зображено кривошипно-шатунний механізм голки.



**Рис. 10.14** – Схема кривошипно-шатунного механізму голки

Загальна робота сил тертя та проколювання:

$$A_0 = (P'_{cp} + F_{тр.ср}) \cdot \delta + (P''_{cp} + F_{тр.ср}) \cdot h_n,$$

де  $P'_{cp}$ ,  $P''_{cp}$  – середня сила проколу відповідно при вході голки в матеріал та виході з нього;  $F_{тр.ср}$  – середня сила тертя голки об матеріал;  $\delta$  – товщина матеріалу;  $h_n$  – хід голки нижче площини платформи.



Потужність, що витрачається на тертя та проколювання:

$$N = \frac{A_0 n}{1000},$$

де  $n$  – частота обертання головного вала.

15. Різання матеріалів методом пилки здійснюється шляхом насунання матеріалу на ніж, що рухається вздовж вершини свого леза.

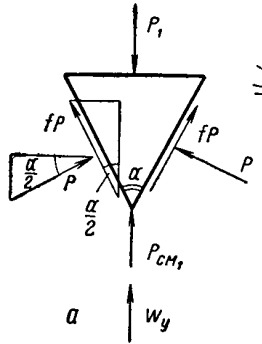


Рис. 10.15 – Переріз нерухомого ножа

При нерухомому ножеві (рис. 10.15) на ріжучу кромку ножа діє зовнішня сила:

$$P_1 = 2P \left( \sin \frac{\alpha}{2} + f \cos \frac{\alpha}{2} \right) + P_{cm1},$$

де  $P$  – сила тиску з боку матеріалу;  $\alpha$  – кут заточки ножа;  $f$  – коефіцієнт тертя між ножем та матеріалом;  $P_{cm1}$  – сила опору зм'яття матеріалу вершиною леза.

16. Коли ніж здійснює рух в площині паралельній лезу (рис. 10.16) сила, що діє на ніж обчислюється виразом:

$$P_2 = 2P \sin \beta \left( \sin \frac{\alpha_1}{2} + f \cos \frac{\alpha_1}{2} \right) + P_{cm2}$$

де  $P$  – сила тиску з боку матеріалу;  $\beta$  – кут нахилу вектора швидкості різання;  $\alpha_1$  – робочий кут різання;  $f$  – коефіцієнт тертя

між ножем та матеріалом;  $P_{см2}$  – сила опору зм'яття матеріалу вершиною леза.

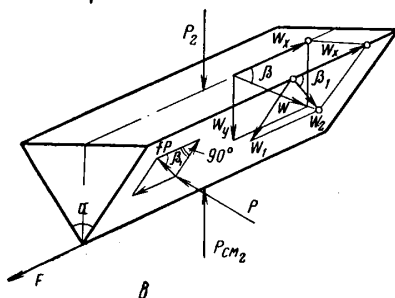


Рис. 10.16 – Переріз рухомого ножа

17. При різанні матеріалів стрічковим ножем (рис. 10.17) сила опору пакета матеріалу визначається за формулою:

$$F_{опр} = (P \sin \beta + F_m) f$$

де  $P$  – сила тиску на матеріал;  $\beta$  – кут нахилу вектора швидкості різання;  $F_m$  – сила тяжіння матеріалу;  $f$  – коефіцієнт тертя між ножем та матеріалом.

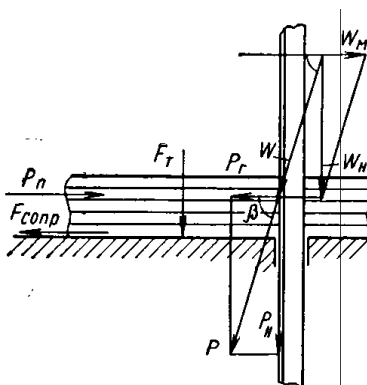


Рис. 10.17 – Схема вирізання деталей стрічковим ножем

18. При різанні матеріалів дисковим ножом (рис. 10.18) для переміщення пакета деталей по столу до нього необхідно прикласти силу:

$$P_n = P \cos \beta + (P \sin \beta + F_m) f,$$

де  $P$  – сила тиску на матеріал;  $\beta$  – кут нахилу вектора швидкості різання;  $F_m$  – сила тяжіння матеріалу;  $f$  – коефіцієнт тертя між ножом та матеріалом.

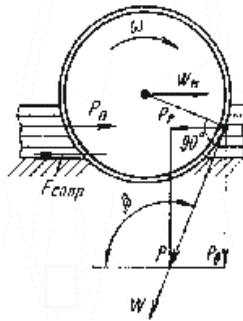


Рис. 10.18 – Схема вирізання матеріалу дисковим ножом

19. При різанні матеріалів методом ножиців (рис. 10.19) сила зм'яття направлена перпендикулярно лезу ножа і дорівнює:

$$P_{см} = lh\sigma_{см},$$

де  $l$  – ширина площадки зм'яття матеріалу лезом;  $h$  – довжина леза;  $\sigma_{см}$  – граничне напруження міцності матеріалу при зм'ятті.

Вершина леза занурюється в матеріал на глибину:

$$\delta_1 = \frac{\sigma_p \delta}{\sigma_{см} \operatorname{tg} \beta},$$

де  $\sigma_p$  – граничне напруження міцності матеріалу на зріз;  $\delta$  – товщина матеріалу;  $\beta$  – кут заточки.

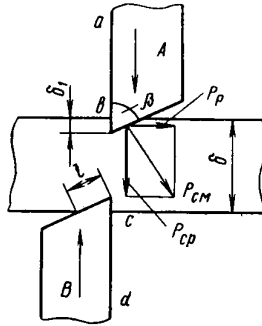


Рис. 10.19 – Схема різання матеріалу методом ножиців

20. При різанні матеріалів методом похилих ножиців (рис. 10.20) сила різання дорівнює:

$$P_p = \frac{\sigma_p \delta^2}{2 \operatorname{tg} \alpha},$$

де  $\sigma_p$  – граничне напруження міцності матеріалу на зріз;  $\delta$  – товщина матеріалу;  $\alpha$  – кут нахилу леза.

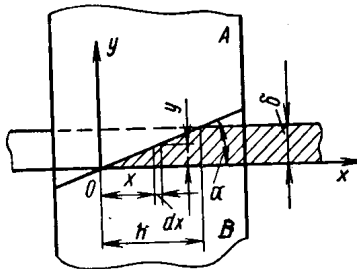


Рис. 10.20 – Схема положення ножів і матеріалу методом ножиців з похилими ножами

21. При різанні методом ножиців із застосуванням дискового ножа (рис. 10.21) потужність, яка витрачається на процес різання визначається формулою:

$$N = \frac{P_p h \omega}{1000},$$

де  $P_p$  – сила різання;  $h$  – відстань від лінії центра ножа до точки прикладення сили;  $\omega$  – кутова швидкість ножа.

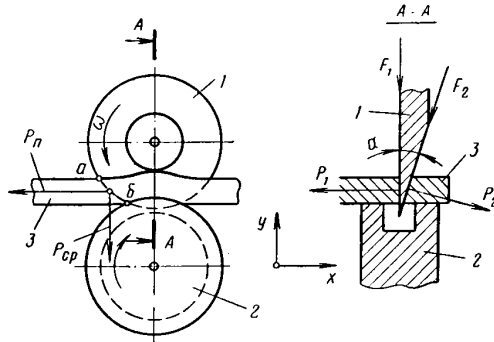


Рис. 10.21 – Схема різання матеріалу дисковим ножом, що обертається

22. При обробці деталей низу взуття з метою підготовки їх кінцевого оздоблення використовується шліфування. Цей процес являє собою процес різання за допомогою абразивних зерен (рис. 10.22).

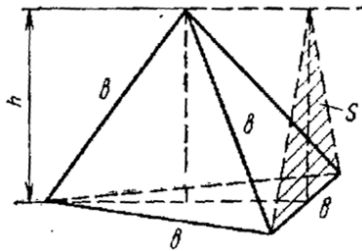


Рис. 10.22 – Схема абразивного зерна

Сила опору при обертанні шліфувального диска:

$$F_{opr} = z_{z1} k_{ep} S z_3 \sigma_p,$$

де  $z_{z1}$  – кількість рядів зерен по дузі циліндра що одночасно беруть участь в процесі шліфування;  $k_{ep}$  – коефіцієнт врізання;  $S$  – площа рівнобедреного трикутника, що дорівнює  $bh/2$ ;  $z_3$  – кількість

зерен на одиницю довжини круга;  $\sigma_p$  – граничне напруження міцності матеріалу на зріз.

Потужність, що йде на процес шліфування:

$$N = \frac{F_{onp} W}{1000},$$

де  $W$  – швидкість шліфувального інструмента.

23. На рис. 10.23 зображено траєкторію руху виробів при їх обробці у робочих барабанах машин хімічного чистення одягу і пральних машин.

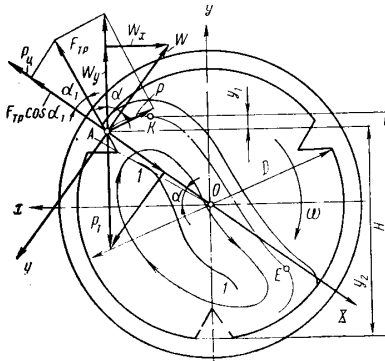


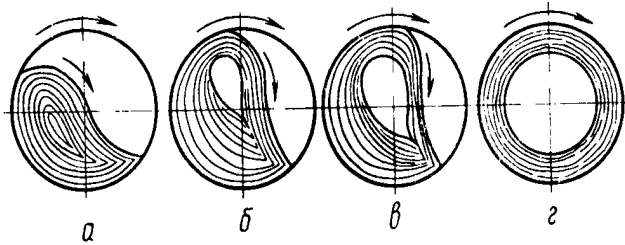
Рис. 10.23 – Схема руху маси виробів у робочому барабані

Повна висота падіння тіл визначається за формулою:

$$H = 2,25D \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha,$$

де  $D$  – діаметр барабана;  $\alpha$  – кут повороту барабана вище горизонтального діаметра.

24. Рух потоку маси виробів в барабані технологічної машини залежить від частоти його обертання. Умовно виділяють чотири режими (рис. 10.24): каскадний рух, початок прориву, стан рівноваги, кінець відносного руху виробів.



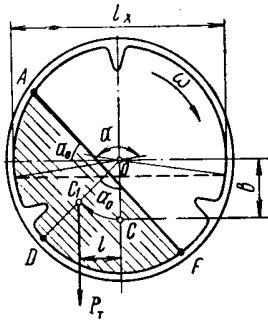
а – каскадний рух, б – початок прориву, в – стан рівноваги, г – кінець відносного руху виробів  
**Рис. 10. 24 – Різні фази руху маси виробів у робочому барабані**

Вид режиму визначається фактором розділення  $\Phi$ . При  $\Phi \ll 1$  – каскадний рух;  $\Phi < 1$  – початок прориву;  $\Phi = 1$  – стан рівноваги;  $\Phi \gg 1$  – кінець відносного руху виробів. Значення фактора визначають за формулою:

$$\Phi = 4Rn^2,$$

де  $R$  – радіус барабана;  $n$  – частота його обертання.

25. При обертанні внутрішнього барабана вироби та рідина набувають форму, що наближається до форми циліндричного сегмента AFD (рис 10.25).



**Рис. 10.25 – Схема для розрахунку корисної потужності робочого барабана**

Потужність, що витрачається для підняття сегмента на висоту  $b(1 - \cos\alpha_0)$ :

$$N_{\text{под}} = \frac{P_m b (1 - \cos \alpha_0) \pi n}{500 \alpha_0},$$

де  $P_m$  – сила тяжіння виробів та рідини;  $\alpha_0$  – кут підйому сегмента;  $n$  – частота обертання барабана.

26. Для сушки виробів використовуються барабанні сушильні машини. Об'єм внутрішнього барабана машини визначають за формулою:

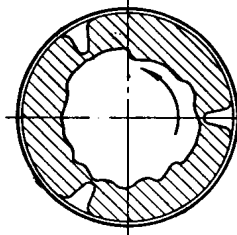
$$V = G_3 v_0 k,$$

де  $G_3$  – загрузочна вага;  $v_0$  – питома вмістимість барабана;  $k$  – коефіцієнт, що враховує об'єм, який займають гребені.

Частота обертання барабана визначається за формулою:

$$n = \frac{1,03}{2\sqrt{R}},$$

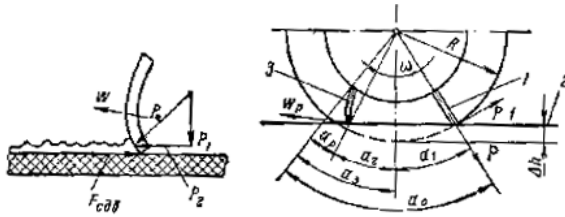
де  $R$  – радіус барабана.



**Рис. 10.26 – Схема розташування виробів у робочому барабані сушильної машини**

27. Механічне чищення й обезпилування виробів виконують з використанням ворсових щіток. Найбільш поширеними їх видами є плоскі та циліндричні.





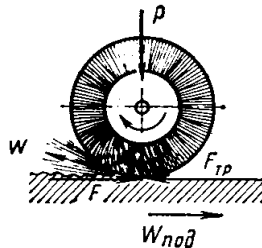
а – схема дії ворсинки щітки на шар пилу, б – схема геометричних параметрів циліндричної щітки  
**Рис. 10.27 – Схема роботи циліндричної щітки в процесі очищення матеріалу**

Середня швидкість руху кінців ворсин, що характеризує середню швидкість видалення частинок бруду визначається за формулою:

$$w_{cp} = \frac{4\lambda_{\kappa}}{\tau_1},$$

де  $\lambda_{\kappa}$  – амплітуда коливань;  $\tau_1 = \frac{2\pi}{3,5} \sqrt{\frac{\rho \cdot S \cdot l^4}{EI}}$  – період основного коливання;  $f$  – густина матеріалу ворсини;  $P$  – площа поперечного перерізу ворсини;  $l$  – довжина ворсини;  $E$  – модуль пружності;  $I$  – момент інерції перерізу ворсини.

27. Механічну чистку виробів виконують за допомогою ворсових щіток (рис. 10.27).



**Рис. 10.27 – Обробка взуття обертовою щіткою в процесі чистення**

Сила тертя, або зчеплення, що очищає поверхню деталі:

$$F_{mp} = Pf \geq F,$$

де  $P$  – сила тиску на матеріал;  $f$  – коефіцієнт тертя між поверхнею виробу;  $F$  – сила зчеплення забруднення з поверхнею виробу.

28. При поліруванні виробів (рис. 10.28) ковзання ворсинок проходить з швидкістю:

$$w_k = w - w_n,$$

де  $w$  – лінійна швидкість щітки;  $w_n$  – швидкість подачі виробу.

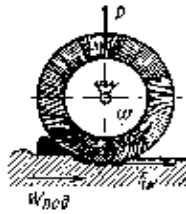


Рис. 10.28 – Обробка взуття щіткою в процесі полірування

Сила тертя щітки об матеріал:

$$F_{mp} = Pf,$$

де  $P$  – сила тиску на матеріал;  $f$  – коефіцієнт тертя між щіткою та поверхнею виробу.

29. Для чищення швейних виробів використовуються щіточні машини. На рис. 10.29 показано схему роботи машини:

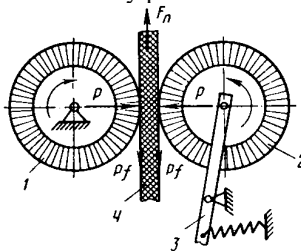


Рис. 10.29 – Схема будови щіткової машини для чищення манжет штанів

Потужність, необхідна для чищення, йде на тиск щіток та на подачу виробу:

$$N_{щ} = \frac{2Pf w_{щ}}{1000} ;$$

$$N_n = \frac{F_n w_n}{1000} ,$$

де  $P$  – сила тиску щітки на матеріал;  $f$  – коефіцієнт тертя щітки об матеріал;  $w_{щ}$  – лінійна швидкість щітки;  $F_n$  – зусилля подачі;  $w_n$  – швидкість подачі.

30. При чищенні килимових виробів момент тертя та витрати потужності знаходять за формулами:

$$M_{mp} = F_1 (e^{f\alpha} - 1) R_{щ} ;$$

$$N_{mp} = \frac{1}{1000} M_{mp} \omega$$

де  $F_1$  – сила натягу виробу;  $f$  – коефіцієнт тертя між щіткою та поверхнею виробу;  $\alpha$  – кут обхвату барабана;  $R_{щ}$  – радіус щіткового барабана;  $\omega$  – кутова швидкість барабана.

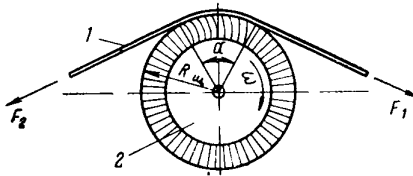


Рис. 10.30 – Схема дії щітки при очищенні килимових виробів

31. При чищенні килимових виробів за допомогою біла (рис. 10.31) об'єм повітря, що витісняється в момент удару визначається за формулою:

$$V_6 = \frac{R^2 L}{2} = \left( \frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right) ,$$

де  $R$  – радіус робочого органа;  $L$  – довжина контакту

робочого органа з матеріалом;  $\alpha$  – центральний кут кругового сегмента.

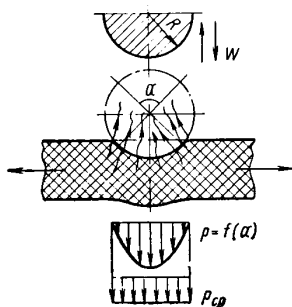


Рис. 10.31 – Схема дії біла в процесі вибивання пилу

32. При чищенні виробів за допомогою пневмодинамічного удару (рис. 10.32) перепад тиску визначається за формулою:

$$\Delta\rho = \rho_n V w / S \Delta\tau,$$

де  $\rho_n$  – густина повітря;  $V$  – об'єм повітря;  $w$  – відносна швидкість виробу та повітря;  $S$  – площа проекції випуклої частини виробу на площину, перпендикулярну до напрямку відносного руху повітря;  $\Delta\tau$  – час дії сили удару.

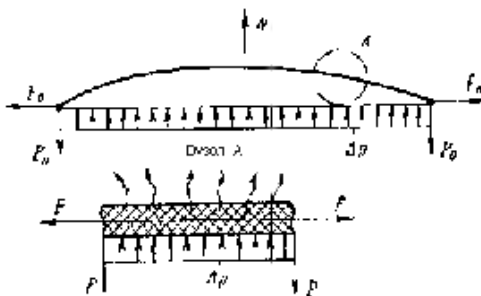
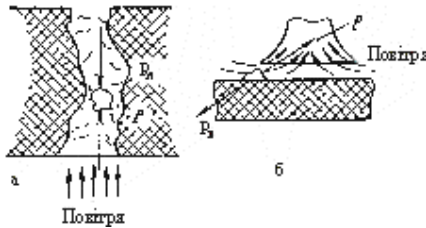


Рис. 10.32 – Схема дії потоку повітря при пневмодинамічному ударі на виріб

33. При пневматичному чищенні й обезпилюванні виробів повітря, проникаючи в пори матеріалу або рухаючись відносно виробу,

діє на частинки пилу (рис. 10.33).



а – рух повітря через пори матеріалу, б – рух повітря через зазор між пилезбірником і матеріалом

Рис. 10.33 – Схема сил, що діють на частку при русі повітря

Спад тиску можна визначити за формулою:

$$\Delta p = \frac{\mu \delta \cdot f_{n.n} \rho_n w_{\phi}^2}{8 \varepsilon^2},$$

де  $\mu$  – в'язкість повітря;  $\delta$  – товщина шару матеріалу;  $f_{n.n}$  – питома площа поверхні пор;  $\rho_n$  – густина повітря;  $w_{\phi}$  – фіктивна швидкість повітря;  $\varepsilon$  – пористість матеріалу.

34. Процес вирубування деталей взуття за допомогою різака складається з декількох етапів. Зокрема на другому етапі (рис. 10.34) сила вирубування визначається за формулою:

$$Q_{II} = P + 2t \sigma_{cm} (f_1 + f_2 + tg\beta_1 + tg\beta_2),$$

де  $P$  – сила пружного опору матеріалу;  $t$  – глибина входження різака в матеріал;  $\sigma_{cm}$  – рівномірно розподілене навантаження на різак з боку матеріалу, яке дорівнює тимчасовому опору матеріалу на стиск;  $f_1$ ,  $f_2$  – коефіцієнт тертя відповідно між правою та лівою гранями і матеріалом;  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – кути заточування різака.

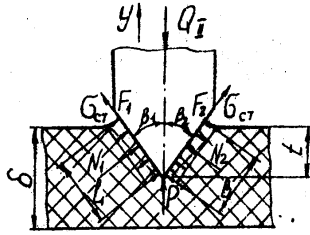


Рис. 10.34 – Схема другого етапу процесу вирубубання деталі різакком

35. Сила вирубубання на третьому етапі (рис. 10.35) (див. умову попередньої задачі) визначається за формулою:

$$Q_{III} = t\sigma_{cm}B(f_1 + f_2 + tg\beta_1 + tg\beta_2),$$

де  $t$  – глибина входження різакка в матеріал;  $\sigma_{cm}$  – рівномірно розподілене навантаження на різак з боку матеріалу, яке дорівнює тимчасовому опору матеріалу на стиск;  $B$  – довжини леза різакка;  $f_1, f_2$  – коефіцієнт тертя відповідно між правою та лівою гранями і матеріалом;  $\beta_1, \beta_2$  – кути заточування різакка.

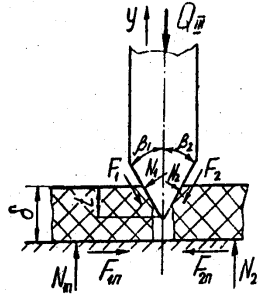


Рис. 10.35 – Схема дії сил на третьому етапі процесу вирубубання деталі різакком

36. При розрізанні матеріалів стрічковим ножем (рис. 10.36) зусилля подачі матеріалу на ніж визначається за формулою:

$$P_n = 2N_1 \left( f_1 \cos \frac{\beta_p}{2} \sin \varphi + \sin \frac{\beta_0}{2} \right),$$

де  $N_1$  – сила нормального тиску матеріалу на ніж;  $f_1$  –

коефіцієнт тертя матеріалу по бокових гранях ножа;  $f_1$  – робочий кут різання;  $\varphi$  – кут між векторами швидкості ножа та швидкості різання;  $h_k$  – кут загострення ножа.

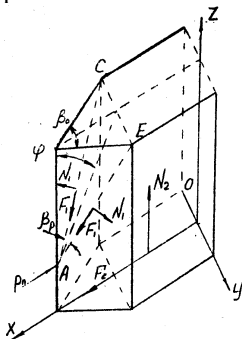


Рис. 10.36 – Схема дії сил на матеріал при розрізанні його стрічковим ножем

Потужність подачі розраховується за формулою:

$$N_n = \frac{N_1 v_n}{51} \left( f_1 \cos \frac{\beta_p}{2} \sin \varphi + \sin \frac{\beta_0}{2} \right),$$

де  $v_n$  – швидкість подачі матеріалу на ніж.

37. При розрізанні матеріалів стрічковим ножем (рис. 10.37) зусилля переміщення ножа визначається за формулою:

$$P_H = 2N_1 \left( f_1 \cos \frac{\beta_p}{2} \cos \varphi + f_3 \sin \frac{\beta_0}{2} \right),$$

де  $N_1$  – сила нормального тиску матеріалу на ніж;  $\Delta h$  – коефіцієнт тертя матеріалу по бокових гранях ножа;  $\beta_p$  – робочий кут різання;  $\varphi$  – кут між векторами швидкості ножа та швидкості різання;  $f_3$  – коефіцієнт тертя ножа об направляючі;  $\beta_0$  – кут загострення ножа.

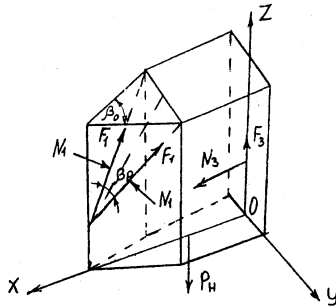


Рис. 10.37 – Схема дії сил на стрічковий ніж при розрізанні матеріалів

Потужність, що витрачається на переміщення ножа з швидкістю  $v_H$ , визначається формулою:

$$N_H = \frac{N_1 v_H}{51} \left( f_1 \cos \frac{\beta_p}{2} \cos \varphi + f_3 \sin \frac{\beta_0}{2} \right)$$

38. Шток гідроциліндра вирубного преса розраховують на розтяг. Розрахункова схема показана на рисунку 10.38.

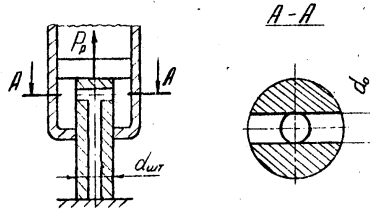


Рис. 10.38 – Розрахункова схема штока

Для забезпечення міцності діаметр штока розраховують за формулою:

$$d_{um} = \frac{2}{\pi} \left( d_0 + \sqrt{d_0^2 + \pi \frac{P_p}{[\sigma_p]}} \right)$$

де  $d_0$  – діаметр отвору штока;  $P_p$  – сила розтягу;  $[\sigma_p]$  – допустиме напруження матеріалу штока на розтяг.



Одержаний результат заокруглюють в більший бік до нормального з урахуванням різьби, що є на зовнішній поверхні штока.

39. Для двоїння і вирівнювання за товщиною деталей верху взуття і шкіргалантерейних виробів із натуральних та штучних шкір застосовують двоільно-стрічкові машини. На рисунку 10.39 зображена розрахункова схема механізму ножа такої машини.

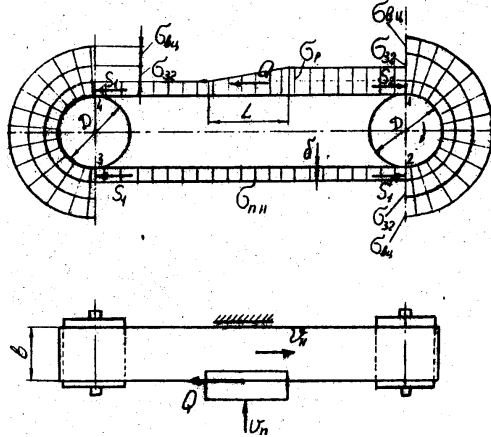


Рис. 10.39 – Розрахункова схема механізму стрічкового ножа

Оптимальна товщина ножа машини визначається за формулою:

$$\delta_{onm} = \sqrt{\frac{-Qe^{\pi f} D}{b(e^{\pi f} - 1)E}}$$

де  $Q$  – сила різання;  $f$  – коефіцієнт тертя між ножом і шківом;  $D$  – діаметр шківа;  $b$  – ширина ножа;  $E$  – модуль пружності.

40. Для утримування заготовки верху взуття за затягну кромку при обтяжці і затяжці її на копилі в технологічних машинах використовуються кліщі. На рисунку 10.40 зображена схема губок кліщів і сили, які діють в кліщах під час витягування заготовки.

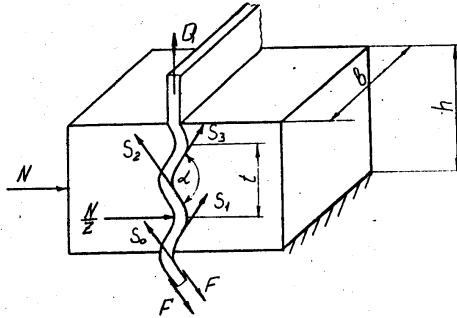


Рис. 10.40 – Схема губок кліщів

Формула для розрахунку сили стиску має вигляд:

$$N = \frac{Qz}{2f l^{zf\alpha}}$$

де  $Q$  – сила витягування заготовки;  $z$  – кількість зубців на робочій поверхні губки;  $f$  – коефіцієнт тертя між поверхнею губки і матеріалом заготовки;  $\alpha$  – кут загострення зубців.

Ширину кліщів визначають за виразом:

$$b > \frac{Qz}{2f l^{zf\alpha} h[\sigma_{зм}]}$$

де  $h$  – довжина кліщів;  $[\sigma_{зм}]$  – допустиме напруження матеріалу кліщів на зминання.

41. В пружинно–кулачкових механізмах (рис. 10.41) холостий хід молоткової штанги (хід вверх) відбувається за допомогою кулачка. Під час холостого ходу молотка пружина закручується, потім створює рушійний момент для виконання робочого ходу молотка і забивання штучного закріплювача ударом. Жорсткість пружини має бути достатньою, щоб перебороти опір матеріалу при зануренні в нього закріплювачів.

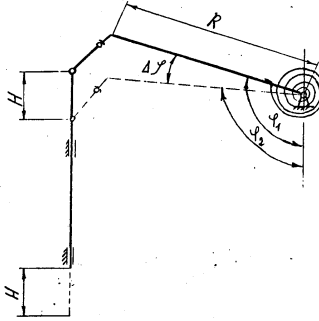


Рис. 10.41 – Схема пружинно-кулачкового механізму

Визначається жорсткість пружини за формулою:

$$c = \frac{2AR^2}{2\varphi_1 HR + H^2}$$

де  $A$  – робота забивання закріплювача;  $R$  – довжина натискного важеля механізму молотка;  $\varphi$  – кут закручування;  $H$  – робочий хід молоткової штанги.

42. Пенетраційний (голковий) захватний орган може бути використаний для захвату деталей низу взуття, що мають достатню товщину та жорсткість. Для розрахунку механізмів захвату треба знати зусилля, з яким необхідно натиснути на голки, щоб занурити їх у матеріал деталі на потрібну глибину (рис. 10.42).

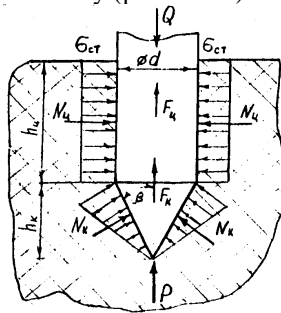


Рис. 10.42 – Схема взаємодії голки захвата з деталлю

Зусилля натискання захвату на голки розраховують за

формулою:

$$Q = \pi d n \sigma_{cm} \left[ h_{ц} f - h_{к} \left( f - \frac{\sin \beta + f \cos \beta}{4} \right) \right],$$

де  $d$  – діаметр голки;  $n$  – кількість голок в захваті;  $\sigma_{cm}$  – напруження стиску матеріалу деталі;  $h_{ц}$  – глибина занурення циліндричної частини голки;  $f$  – коефіцієнт тертя між голкою та матеріалом деталі;  $h_{к}$  – довжина конічної частини голки;  $\beta$  – кут загострення голки.

## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що таке планування експерименту?
2. Сформулюйте етапи планування.
3. Основна ціль планування.
4. Що таке експеримент?
5. Що означає фізичний і модельний експеримент?
6. Техніка планування експерименту.
7. Які задачі вирішує планування експерименту?
8. Що таке математична модель?
9. Що таке параметр оптимізації?
10. Вимоги до параметру оптимізації.
11. З чого складається методика експерименту?
12. Математичні моделі в інженерних задачах.
13. Методика підготовки і рішення задачі на ПК.
14. Постановка задачі, розробка математичної моделі.
15. Завдання і методи теоретичного дослідження
16. Моделювання процесів
17. Методики побудови розрахункових моделей систем
18. Багатомасові динамічні системи
19. Математичні моделі в інженерних задачах
20. Аналітичні методи в наукових дослідженнях.
21. Поняття функціоналу і варіаційного числення
22. Однофакторний дисперсійний аналіз.
23. Двохфакторний дисперсійний аналіз.
24. Повний факторний експеримент.
25. Дробний факторний експеримент
26. Методи підбору емпіричних формул
27. Апроксимація, інтерполяція і екстраполяція
28. Лінійна регресія
29. Вибір методу чисельного рішення.
30. Розробка алгоритму і структури даних.
31. Реалізація алгоритму вхідною мовою ПК.
32. Підготовка завдань для ПК, введення програми.
33. Налаштування і випробування програми.
34. Рішення задачі на ПК, опрацювання та оформлення результатів розрахунку.
35. Оптимізація об'єктів дослідження.
36. Метод Гаусса-Зейделя.
37. Метод випадкового пошуку.

38. Метод симплексів.
39. Метод градієнта.
40. Метод крутого сходження.
41. Алгоритми і способи їх описання.
42. Алгоритми і їхні властивості.
43. Способи опису алгоритмів.
44. Шляхи пошуку оптимального рішення (ПО).
45. Відмінності запуску програм для пошуку оптимума в операційних системах Windows та Linux/Unix.
46. Для чого використовується програмний комплекс OptimizationModel.
47. Модулі програмного комплексу, їх застосування.

### **СИСТЕМА КРИТЕРІЇВ ОЦІНЮВАННЯ**

При виконанні лабораторної роботи та захисту звіту до неї, використовують наступну систему критеріїв оцінювання.

Оцінку «відмінно» (шкала ECTS – A) здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії отримує за глибоке і повне опанування теоретичного матеріалу; легко в ньому орієнтується і вміло використовує понятійний апарат; уміння пов'язувати теорію з практикою, вирішувати практичні завдання, впевнено висловлювати і обґрунтовувати свої судження. Відмінна оцінка передбачає грамотний, логічний виклад відповіді (як в усній, так і у письмовій формі), якісне зовнішнє оформлення звіту. Здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії не вагається при видозміні запитання, вміє робити детальні та узагальнюючі висновки. При відповіді допустив дві-три несуттєві похибки.

Оцінку «добре» (шкала ECTS – B) здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії отримує за повне засвоєння теоретичного матеріалу, володіння понятійним апаратом, орієнтування у вивченому матеріалі; свідомо використовує теоретичні знання для вирішення практичних задач; виклад відповіді грамотний, але у змісті і формі відповіді можуть мати місце окремі неточності, нечіткі формулювання закономірностей тощо. Відповідь здобувача вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії має будуватися на основі самостійного мислення, але з наявністю нечітких формулювань.

Оцінку «добре» (шкала ECTS – C) здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії отримує за повне засвоєння теоретичного матеріалу, володіння понятійним апаратом, орієнтування

у вивченому матеріалі; свідомо використовує теоретичні знання для вирішення практичних задач; виклад відповіді грамотний, але у змісті і формі відповіді можуть мати місце окремі неточності, нечіткі формулювання закономірностей тощо. Відповідь здобувача вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії має будуватися на основі самостійного мислення. Здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії у відповіді допустив дві–три суттєві помилки.

Оцінку «задовільно» (шкала ECTS – D) здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії отримує за достатні знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та практичної діяльності за професією, справляється з виконанням практичних завдань, передбачених програмою. Як правило, відповідь здобувача вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії будується на рівні репродуктивного мислення, здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії має слабкі знання структури дисципліни, допускає неточності і суттєві помилки у відповіді, вагається при відповіді на видозмінене запитання. Разом з тим набув навичок, необхідних для виконання нескладних практичних завдань, які відповідають мінімальним критеріям оцінювання і володіє знаннями, що дозволяють йому під керівництвом викладача усунути неточності у відповіді.

Оцінку «задовільно» (шкала ECTS – E) здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії отримує за неповне опанування теоретичного матеріалу, однак отримані знання відповідають мінімальним критеріям оцінювання; розрахунки, графіки, блок-схеми та висновки виконані з певними неточностями; звіт захищений після закінчення встановленого терміну.

Оцінку «незадовільно» (шкала ECTS – FX) здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії отримує за розрізнені, безсистемні знання, не вміє виділяти головне і другорядне, допускається помилок у визначенні понять, перекручує їх зміст, хаотично і невпевнено викладає матеріал, не може використовувати знання при вирішенні практичних завдань.

Оцінку «незадовільно» (шкала ECTS – F) здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії отримує за повне незнання і нерозуміння теоретичного матеріалу та невиконання роботи.

При оцінюванні використовуються різні засоби контролю, зокрема: засвоєння теоретичного матеріалу перевіряється контрольними

запитаннями; якість виконання, набуття теоретичних знань і практичних навичок перевіряється шляхом захисту кожної лабораторної роботи.

Оцінка, яка виставляється за лабораторне заняття, складається з таких елементів: усне опитування здобувачів вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії перед допуском до виконання лабораторної роботи; знання теоретичного матеріалу з теми; вільне володіння здобувачем вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії спеціальною термінологією і уміння професійно обґрунтувати прийняті конструктивні рішення; своєчасний захист лабораторної роботи.

Термін захисту лабораторної роботи вважається своєчасним, якщо здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії захистив її на наступному після виконання роботи занятті. Пропущене лабораторне заняття здобувач вищої освіти освітньо-наукового рівня доктор філософії зобов'язаний відпрацювати в лабораторіях кафедри у встановлений викладачем термін з реєстрацією у відповідному журналі кафедри, але не пізніше, ніж за два тижні до кінця теоретичних занять у семестрі.



## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

### Основна література

1. Білей П. Методологія наукових досліджень технологічних процесів. /П.Білей, М.Адамовський, Я. Ханік, Н. Довга, Л. Сорока/ — Львів: Видав. НУ "Львівська політехніка", 2003. — 352 с.
2. Спиридонов А. А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов. М.: Машиностроение, 1981. - 184 с.
3. Тихомиров В.Б. Планирование и анализ эксперимента (при проведении исследований в легкой и текстильной промышленности). – М.: Легкая индустрия, 1974. – 262 с.
4. Савчук В.П. Обработка результатов измерений. Физическая лаборатория : учеб. пособие для студентов вузов / В.П. Савчук. – Одесса : ОНПУ, 2002. – Ч. I. – 54 с.
5. Макаричев Ю.А., Иванников Ю.Н. Методы планирование эксперимента и обработки данных: учеб. пособие. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 131 с.
6. Кошовий, М.Д. Оптиміальне планування експерименту при дослідженні технологічних процесів, приладів і систем: навч. посіб./ М.Д. Кошовий, О.М. Костенко, О.В. Заболотний та ін. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2010.– 161 с.
7. Васильев А. Java с примерами и программами. Самоучитель. - СПб.: Наука и техника, 2016.- 368с.
8. Офіційний сайт фірми “Sun microsystem” в інтернеті. Режим доступу: <http://java.sun.com> .
9. Search of the global optimum for problems of optimum design of systems or definitions of optimum laws of management. [Електронний ресурс] - Режим доступу: [http://mdop.sourceforge.net/index\\_us.html](http://mdop.sourceforge.net/index_us.html)

### Додаткова література

1. Исследования и изобретательство в машиностроении. Практикум/ Под общ. Ред. М.М. Кане. Мн.: УП «Технопринт», 2003. 237 с.
2. Минько А.А. Статистический анализ в MS Excel. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2004. – 448 с
3. Тихонов В.А. Основы научных исследований: теория и практика: учеб. пособие для вузов / В.А. Тихонов. – М. : Гелиос АРВ, 2006. – 350 с.
4. Кислий В.М. Організація наукових досліджень: навчальний посібник / В.М. Кислий. — Суми: Університетська книга, 2011. — 224 с.

5. Білей П. Методологія наукових досліджень технологічних процесів. /П.Білей, М.Адамовський, Я. Ханик, Н. Довга, Л. Сорока — Львів: Видав. НУ "Львівська політехніка", 2003. — 352 с.
6. Засименко В.М. Основи теорії планування експерименту. Навч. Посібник / В.М. Засименко — Львів: Видав. ДУ «ЛП», 2000. — 205 с.
7. Стеченко Д.М., Чмир О.С. Методологія наукових досліджень. Підручник. — К.: Знання (Вища освіта ХХІ століття), 2005. — 309 с.

## ЗМІСТ

Вступ

1. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

2. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ

2.1 Теоретичні дослідження

2.2 Моделювання процесів

2.3 Методики побудови розрахункових моделей систем

2.4 Багатомасові динамічні системи

2.5 Попередній контроль математичної моделі

2.6 Математичні моделі в інженерних задачах

2.7 Аналітичні методи в наукових дослідженнях

2.8 Поняття функціоналу і варіаційного числення

3. ПОНЯТТЯ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

3.1 Однофакторний дисперсійний аналіз.

3.2 Двохфакторний дисперсійний аналіз.

3.3 Повний факторний експеримент.

3.4 Дробний факторний експеримент.

3.5 Планування експерименту з метою опису досліджуваного об'єкта.

4. ОПТИМІЗАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

4.1. Метод Гаусса - Зейделя.

4.2. Метод випадкового пошуку.

4.3. Метод симплексів.

4.5. Метод крутого сходження.

5. ФОРМИ

ПРЕДСТАВЛЕННЯ

РЕЗУЛЬТАТІВ

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

5.1 Методи графічного зображення результатів експерименту.

5.2 Методи підбору емпіричних формул.

5.3 Апроксимація, інтерполяція і екстраполяція.

5.4 Лінійна регресія.

6. АЛГОРИТМИ І СПОСОБИ ЇХ ОПИСАННЯ

6.1. Алгоритми і їхні властивості.

6.2. Способи опису алгоритмів.

7. МЕТОДИКА ПІДГОТОВКИ І РІШЕННЯ ЗАДАЧІ НА ПК

7.1. Постановка задачі, розробка математичної моделі.

7.2. Вибір методу чисельного рішення.

7.3. Розробка алгоритму і структури даних.

7.4. Реалізація алгоритму вхідною мовою ПК.

7.5. Підготовка завдання для ПК, введення програми.

7.6.Налагодження і випробування програми.

7.7.Рішення задачі на ПК, обробка і оформлення результатів розрахунку.

## 8.ПОШУК ГЛОБАЛЬНОГО ОПТИМУМУ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОГРАМНИХ КОМПЛЕКСІВ OPTIMIZATION MODEL TA PLANNING EXPERIMENT

8.1 Установка і запуску програмних комплексів.

8.2. Використання програмних комплексів.

8.3. Математична модель.

8.4. Приклад пошуку глобального оптимуму.

## 9.МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

9.1 Загальні вимоги до звіту по лабораторним роботам

Лабораторна робота №1-2.

Лабораторна робота №3-4.

Лабораторна робота №5-6.

Лабораторна робота №7.

Лабораторна робота №8.

9.2 Обробка результатів експерименту та оформлення звіту.

## 10.ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ ОСВІТНЬО-НАУКОВОГО РІВНЯ ДОКТОР ФІЛОСОФІЇ

Контрольні питання

Система критеріїв оцінювання

Рекомендована література