ЕЛЕКТРОМЕХАНІКА, ЕЛЕКТРОТЕХНІКА ТА ЕНЕРГЕТИКА

DOI 10.31891/2307-5732-2021-293-1-93-96
УДК 621.313

Л.А. БІЛИЙ, О.С. ПОЛІЩУК, С.П. ЛІСЕВИЧ, А.О. ПОЛІЩУК, М.А. ЛУЧИНСЬКИЙ
Хмельницький національний університет

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

В роботі обґрунтовано доцільність використання методу модулі чутливості до початкових умов для аналізу періодичних процесів нелінійних електромеханічних пристроїв.

Ключові слова: диференціальні рівняння, матриця чутливості, прискорений пошук, періодичні процеси .

L. A. BILY, O.S. POLISHCHUK, S. P. LISEVYCH, A. O. POLISHCHUK, M.A. LUCHYNSKYI
Khmelnitsky National University

COMPARATIVE ANALYSIS OF CALCULATION METHODS OF PERIODIC PROCESSES OF NONLINEAR ELECTROMECHANICAL SYSTEMS

The analysis of processes of the basic methods of calculation of periodic (stationary) processes (stationary) processes of nonlinear electromechanical systems is carried out. Modeling of steady-state electromechanical processes of electrical devices, covering both power energy converters (electric machines, transformers, electromagnetic devices) and automation devices (actuators, selsyn, position sensors, tachogenerators, rotary transformers, etc.) is one of the most difficult problems due to reproduction of physical processes of different nature that take place in them. Nominal operating modes of most of them are fixed or periodic, that is, their coordinates (currents, voltages, angular displacements, etc.) are periodic functions of time. The problem of finding periodic solutions of nonlinear differential equations is more difficult than the Cauchy problem of integrating these equations from the initial conditions to the establishment, because it imposes another condition on the solution - the periodicity condition. The main methods of analysis of periodic processes in continuous time are the method of models of sensitivity to initial conditions, extrapolation and gradient methods. This article is devoted to the comparison of these methods, which is based on their suitability for algorithmization of the computational process and the possibility of using them to solve other problems, such as determining the static stability of the periodic process.

Modern methods of studying static stability, in particular determining the limits of stability of periodic processes, are based on the algebraic criteria of Nyquist, Hurwitz and others. These methods are not subject to the ideology of building a single mathematical apparatus and creating on its basis a single algorithm for calculating periodic processes.

The practical use of the method, which is based on the model of sensitivity of system variables to their initial conditions, was hampered by the difficulty of determining the elements of the sensitivity matrix. In this paper, this problem is solved by representing the specified matrix by the product of two other matrices obtained on the basis of the functional relationship between electrical and magnetic parameters.

Keywords: differential equations, sensitivity matrix, accelerated search, periodic processes

Постановка проблеми

Аналіз сталих періодичних процесів нелінійних динамічних систем є важливим завданням оптимального проектування через широке застосування в техніці пристроїв періодичного принципу дії. Внаслідок значного часу перехідної реакції таких об'єктів безпосереднє інтегрування диференціальних рівнянь, що їх описують, пов'язане зі значними затратами часу і втратою точності. Тому найчастіше використовують дискретні методи, що базуються на сіткових відображеннях або розкладанні функцій в ряд Фур'є. Ці та інші дискретні методи громіздкі в числовій реалізації та позбавлені критеріїв точності, тому що вимагають інтуїтивного вибору числа вузлів сітки, кількості членів ряду тощо.

Аналіз останніх джерел

Огляд літературних джерел, присвячений методам розрахунку усталених періодичних процесів, показує, що більшість з існуючих методів придатні для аналізу таких процесів у дискретному часі і жоден з них непридатний для проведення розрахунків процесів, у яких, крім електромагнітних змінних, до числа невідомих належить кутова швидкість переміщення контурів. Усі традиційні методи позбавлені критеріїв точності, бо на тому чи іншому етапі розрахунку включають в себе суб’єктивний фактор – вибір числа точок на періоді (точковий метод), вибір числа гармонік в рядах Фур'є (метод гармонійного балансу), тощо. Ці методи складні в алгоритмічному використанні.

Метою роботи є: метою дослідження є обґрунтування доцільності використання методу моделі чутливості до початкових умов для аналізу періодичних процесів електромеханічних пристроїв.

Виклад основного матеріалу

Бурхливий прогрес обчислювальної техніки і все більш широке використання теоретичних підходів в природничих науках сприяють прискореному розвитку математичного моделювання. Математична модель динамічної системи зазвичай є сукупністю диференціальних рівнянь, звичайних або з частинними похідними. При цьому опис лінійних систем витікає з практично завершених теоретичних передумов, в той час як теорія нелінійних динамічних систем поки що знаходиться на стадії формулювання і послідовної перевірки окремих типів нелінійних моделей. Це пояснюється перш за все низкою нових явищ, з якими ми тут зустрічаємося. Таким чином, нелінійні моделі часто мають не один, а кілька розв’язків, для них можливе існування коливальних рішень. Характерною ознакою нелінійних задач є необхідність застосування чисельних методів для знаходження рішення.

І хоча сьогодні існує цілий ряд методів аналізу динамічної поведінки нелінійних моделей, основним інструментом вирішення багатьох практичних завдань залишається теорія звичайних диференціальних рівнянь. Це пояснюється, по-перше, наявністю добре розвиненого аналітичного апарату і чисельних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь; по-друге, наявністю кількісних методів дослідження рішень звичайних диференційних рівнянь, зокрема методів оцінки стійкості, аналізу поведінки рішень довкола особливих точок тощо; по-третє, прозорістю і природністю звичайного диференціального рівняння як математичної моделі для опису процесів переходу реальних об'єктів з одного стану в інший під дією зовнішніх і внутрішніх причин.

Ми обмежимося розглядом таких фізичних процесів, які можна адекватно описати за допомогою кінцевого числа взаємопов'язаних диференціальних рівнянь. Очевидно, що до цієї категорії об'єктів належать електротехнічні пристрої, які можна представити у вигляді електричних схем із зосередженими параметрами та механічні системи. В цьому випадку для опису поведінки системи в будь-який момент часу природно використовувати єдину математичну характеристику – змінну стану.

Оптимальне проектування і правильна експлуатація електротехнічних пристроїв вимагають розрахунку перехідних і сталих процесів, визначення статичної стійкості і параметричної чутливості, під якою розуміють чутливість вихідних параметрів системи до змін параметрів її елементів. Із перерахованих завдань лише розрахунок перехідних процесів здійснюється в неперервному часі. Інші завдань вирішуються в дискретному часі з залученням у кожному випадку різного математичного апарату і різних методів якісного аналізу.

Сьогодні для розрахунку сталих періодичних процесів застосовуються методи пошуку початкових умов, що дозволяють визначити такі значення змінних на початку періоду, які при чисельному інтегруванні на одному періоді призводять до періодичного рішення. Сюди належать квазіньютонівський [1], екстраполяційний [2] і градієнтний [3] методи. Вони орієнтовані на визначення вектора початкових значень x(0), що відповідає сталому режиму роботи, для якого

$$F\left(x\left(0\right)\right)=x\left(0\right)-x\left(T\right)=0, \tag{1}$$

де T – період процесу; $x\left(0\right)$, $x\left(T\right)$ – значення вектора змінних x у моменти часу $t=0$, $t=T$. При цьому математичну модель об'єкта представлено системою рівнянь:

$$\frac{dx}{dt}=A(X)\cdot f(x,t), \tag{2}$$

де $A\left(x\right)$ – матриця коефіцієнтів.

Екстраполяційний метод базується на ε-алгоритмі, призначеному для знаходження числової послідовності з експонентними членами. Суть методу полягає в інтегруванні (2) на деякому проміжку часу $\tau=\left(c+d\right)T$, де c и d – критичні параметри екстраполяції.

В результаті інтегрування отримаємо послідовність значень

$$x^{(k)}=x\left(k,T\right), k=1,2,...,c+d\ . \tag{3}$$

Для сукупності значень (3), починаючи з *c*, будуємо екстраполяційну формулу

$$x\left(0\right)=EXTR\left(x^{(c)},x^{(c+1)},...,x^{(c+d)}\right). \tag{4}$$

Функція EXTER є ε-алгоритмом [4]

$$\begin{gathered}
x_{-1}^{(r)}=0, \qquad r=c,c+1,\dots,c+d\,;\\
x_{0}^{(r)}=x^{(r)},\ r=c-1,\ c,\ c+1,\dots,c+d\,;\\
x_{s+1}^{(r)}=x_{s-1}^{(r+1)}+\left(x_{s}^{(r+1)}-x_{s}^{(r)}\right)^{-1}\ s=c-1,c,\ \dots,c+d-1\,;\\
r=c-1,c,c+1,\ \dots,c+d-1-s.
\end{gathered} \tag{5}$$

Результат екстраполяції, що відповідає EXTER в [4], дорівнює $x\left(0\right)=x_{c+d}^{(0)}$.

Для системи (2) порядку n значення $d\approx 2n$. Значення *c* вибирають в межах від 1 до 5.

У лінійних системах рішення за допомогою (5) отримують за одну ітерацію, в нелінійних – за кілька.

Квазіньютонівський метод. У деяких випадках доводиться вирішувати систему звичайних диференціальних рівнянь за наявності умов на значення залежних змінних, що задають для різних значень *t*. Умова періодичності (1) містить два таких значення на початку $x\left(0\right)$ і в кінці $x\left(T\right)$ періоду. Задачі (1) і (2) називаються крайовими задачами, методи розв'язання яких відрізняються від методів вирішення задач Коші.

У разі нелінійних диференціальних рівнянь (2) система рівнянь (1) також є нелінійною. Увесь розв'язок можна розбити на три етапи: знаходження ефективного методу обчислення $F\left(x\left(0\right)\right)$, вибір відповідного ітераційного методу для вирішення рівняння (1) та підбір хорошого початкового наближення для $x(0)$.

При обчисленні $F\left(x(0)\right)$ отримують цілком задовільні результати, використовуючи простий метод інтегрування, наприклад метод Рунге-Кутта.

Для вирішення системи рівнянь (1) зазвичай використовують метод Ньютона:

$$x(0)^{k+1} = x(0)^{k} - \left[F'\left(x(0)^{k}\right)\right]^{-1} \cdot F'\left(x(0)^{k}\right), \tag{6}$$

де $\mathrm{F}'\left(x(0)\right)$ – матриця Якобі, яку одержимо диференціюванням (1) за $x(0)$.

$$\mathrm{F}'\left(x(0)\right) = \mathrm{E} - \Phi\left(x(0), T\right). \tag{7}$$

Тут

$$\Phi\left(x(0), T\right) = \frac{\partial x(T)}{\partial x(0)}, \tag{8}$$

де $\Phi\left(x(0), T\right)$ – матриця переходу станів або матриця чутливості змінної моделі до своїх початкових значень; Е – одинична матриця.

Складність визначення матриці чутливості є основною перешкодою до використання квазіньютонівского методу для вирішення задач електромеханіки.

Вирішення цієї проблеми полягає в наступному. В електротехнічних пристроях існує функціональний зв'язок між електричними компонентами (позначимо через x) і магнітними (позначимо через y), що має вигляд:

$$x = x(y). \tag{9}$$

Система диференційних рівнянь для змінної y буде такою:

$$\frac{dy}{dt} = f(x, t). \tag{10}$$

Диференціюючи (9) за $x(0)$, отримаємо при $t = T$

$$\Phi\left(x(0), T\right) = \mathrm{A}(x) \cdot \mathrm{S}\left(x(0), T\right), \tag{11}$$

де

$$\mathrm{A}(x) = \frac{\partial x}{\partial y}\ ;\ \mathrm{S}\left(x(0), T\right) = \frac{\partial y}{\partial x(0)}. \tag{12 а, б}$$

Тут $\mathrm{A}(x)$ – матриця коефіцієнтів; $\mathrm{S}\left(x(0), T\right)$ – допоміжна матриця чутливості до початкових умов. Її елементи визначають із диференційних рівнянь першої варіації, отриманих диференціюванням (10) за $x(0)$.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \cdot \mathrm{A}(x) \cdot \mathrm{S}\left(x(0), T\right). \tag{13}$$

Вирази (11) та (13) свідчать про те, що при вирішенні електромеханічних задач матрицю чутливості можна представити добутком матриці коефіцієнтів моделі та допоміжної матриці чутливості, елементи якої легко визначаються з диференційних рівнянь першої варіації.

На *k*-тій ітерації формули Ньютона (6) лінійне варіаційне рівняння (13) інтегрується спільно з (2) на періоді. В результаті визначимо цільову функцію (1), матрицю Якобі (7), цього достатньо для визначення правої частини ітераційної формули (6).

Висновки

1. Аналіз усталених періодичних процесів доцільно здійснювати в часовій області, використовуючи для цього квазіньютонівський, екстраполяційний і градієнтний методи.
2. Найбільш простим та універсальним є квазіньютонівський метод. Вирішення проблеми обчислення матриці чутливості до початкових умов відкрило широкі можливості для розв'язування задач електромеханіки – найбільш складних задач теоретичної електротехніки.
3. Екстраполяційний алгоритм вимагає великих витрат машинного часу і обмежений у вирішенні задач з багатозначними розв'язками.
4. Складність алгоритмічної реалізації робить градієнтний метод найменш привабливим серед методів часового розв'язку.

Література

1. Aprille T.Y. A computer algorithm to determine the steady state response of nonlinear oscilators / T.Y. Aprille., T.N. Trick // IEEE Trans. Circuit Theorg.1972. Vol. CT –19-P.354 – 360.

2. Skelboe S. Computation of the periodic steady – state response of nonlinear networks by extrapolation methods / S. Skelboe // IEEE Trans. Circuit Syst.- 1980.- Vol. CAS –27 –P.161 – 175.

3. Nakhla M.S. Determining the periodic response of nonlinear system by a gradient method / M.S. Nakhla, F.H Branin. // int. J.Circuit Theory Appl.- 1997.- Vol.5.- 255-277.

4. Bresinski C.E. The solution of systems of equation using the (-algorithm and application to boundary – value problems / C.E. Bresinski, A.S. Ricu. // Math. Comp. - 1974. - Vol. 28. - N 127. - P. 731-741.

References

1. Aprille T.Y. A computer algorithm to determine the steady state response of nonlinear oscilators / T.Y. Aprille., T.N. Trick // IEEE Trans. Circuit Theorg.1972. Vol. CT –19-P.354 – 360.

2. Skelboe S. Computation of the periodic steady – state response of nonlinear networks by extrapolation methods / S. Skelboe // IEEE Trans. Circuit Syst.- 1980.- Vol. CAS –27 –P.161 – 175.

3. Nakhla M.S. Determining the periodic response of nonlinear system by a gradient method / M.S. Nakhla, F.H Branin. // int. J.Circuit Theory Appl.- 1997.- Vol.5.- 255-277.

4. Bresinski C.E. The solution of systems of equation using the (-algorithm and application to boundary – value problems / C.E. Bresinski, A.S. Ricu. // Math. Comp. - 1974. - Vol. 28. - N 127. - P. 731-741.

Рецензія/Peer review : 17.01.2021 р. Надрукована/Printed :10.03.2021 р.